Física e Matemática Aplicadas à Arquitetura

PROFESSORA

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

ACESSE AQUI O SEU LIVRO NA VERSÃO **DIGITAL!**

EXPEDIENTE

DIREÇÃO UNICESUMAR

Reitor Wilson de Matos Silva **Vice-Reitor** Wilson de Matos Silva Filho **Pró-Reitor de Administração** Wilson de Matos Silva Filho **Pró-Reitor Executivo de EAD** William Victor Kendrick de Matos Silva **Pró-Reitor de Ensino de EAD** Janes Fidélis Tomelin **Presidente da Mantenedora** Cláudio Ferdinandi

NEAD - NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Diretoria Executiva Chrystiano Mincoff, James Prestes, Tiago Stachon **Diretoria de Graduação e Pós-graduação** Kátia Coelho **Diretoria de Cursos Híbridos** Fabricio Ricardo Lazilha **Diretoria de Permanência** Leonardo Spaine **Head de Graduação** Marcia de Souza **Head de Metodologias Ativas** Thuinie Medeiros Vilela Daros **Head de Tecnologia e Planejamento Educacional** Tania C. Yoshie Fukushima **Head de Recursos Digitais e Multimídias** Franklin Portela Correia **Gerência de Planejamento e Design Educacional** Jislaine Cristina da Silva **Gerência de Produção Digital** Diogo Ribeiro Garcia **Gerência de Recursos Educacionais Digitais** Daniel Fuverki Hey **Supervisora de Design Educacional e Curadoria** Yasminn T. Tavares Zagonel **Supervisora de Produção Digital** Daniele Correia

PRODUÇÃO DE MATERIAIS

Coordenador de Conteúdo Flavio Augusto Carraro **Designer Educacional** Jociane Benedett **Curadoria** Rafaela Benan Zara **Revisão Textual** Meyre Aparecida Barbosa da Silva **Editoração** Lucas Pinna Silveira Lima **Ilustração** Welington Oliveira **Realidade Aumentada** Maicon Douglas Curriel, Matheus Guandalini, Cesar Henrique Seidel **Fotos** Shutterstock e Pixabay.

FICHA CATALOGRÁFICA

C397 **CENTRO UNIVERSITÁRIO DE MARINGÁ**.
Núcleo de Educação a Distância. **KIRNEV,** Debora Cristiane Barbosa.

Física e Matemática Aplicadas à Arquitetura.
Debora Cristiane Barbosa Kirnev.
Maringá - PR: Unicesumar, 2021. Reimpresso em 2023.

328 p.
"Graduação - EaD".

1. Física 2. Matemática 3. Arquitetura. EaD. I. Título.

Impresso por:

CDD - 22 ed. 720
CIP - NBR 12899 - AACR/2
ISBN 978-65-5615-460-2

Bibliotecário: João Vivaldo de Souza CRB- 9-1679

Pró Reitoria de Ensino EAD Unicesumar
Diretoria de Design Educacional

UniCesumar

NEAD - Núcleo de Educação a Distância
Av. Guedner, 1610, Bloco 4 - Jd. Aclimação - Cep 87050-900 | Maringá - Paraná
www.unicesumar.edu.br | 0800 600 6360

BOAS-VINDAS

A UniCesumar celebra os seus 30 anos de história avançando a cada dia. Agora, enquanto Universidade, ampliamos a nossa autonomia e trabalhamos diariamente para que nossa educação à distância continue como uma das melhores do Brasil. Atuamos sobre quatro pilares que consolidam a visão abrangente do que é o conhecimento para nós: o intelectual, o profissional, o emocional e o espiritual.

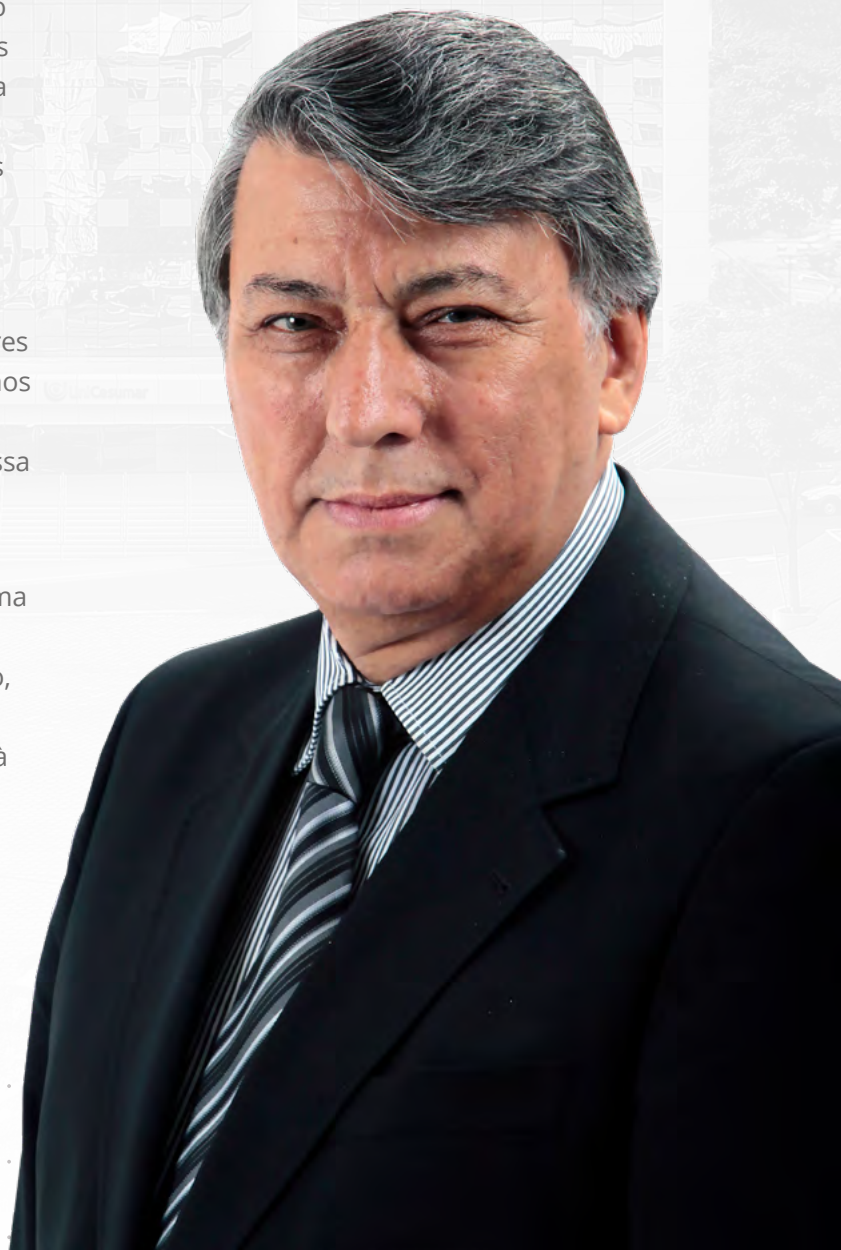
A nossa missão é a de "Promover a educação de qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, formando profissionais cidadãos que contribuam para o desenvolvimento de uma sociedade justa e solidária". Neste sentido, a UniCesumar tem um gênio importante para o cumprimento integral desta missão: o coletivo. São os nossos professores e equipe que produzem a cada dia uma inovação, uma transformação na forma de pensar e de aprender. É assim que fazemos juntos um novo conhecimento diariamente.

São mais de 800 títulos de livros didáticos como este produzidos anualmente, com a distribuição de mais de 2 milhões de exemplares gratuitamente para nossos acadêmicos. Estamos presentes em mais de 700 polos EAD e cinco campi: Maringá, Curitiba, Londrina, Ponta Grossa e Corumbá, o que nos posiciona entre os 10 maiores grupos educacionais do país.

Aprendemos e escrevemos juntos esta belíssima história da jornada do conhecimento. Mário Quintana diz que "Livros não mudam o mundo, quem muda o mundo são as pessoas. Os livros só mudam as pessoas". Seja bem-vindo à oportunidade de fazer a sua mudança!

Reitor
Wilson de Matos Silva

> *Tudo isso para honrarmos a nossa missão, que é promover a educação de qualidade nas diferentes áreas do conhecimento, formando profissionais cidadãos que contribuam para o desenvolvimento de uma sociedade justa e solidária.*



MINHA HISTÓRIA

MEU CURRÍCULO

Aqui você pode conhecer um pouco mais sobre mim, além das informações do meu currículo.

Olá, aluno(a)! Eu sou a professora Debora Kirnev, e trabalharemos juntos nesta disciplina. Além de toda minha formação acadêmica, sempre tive outras vivências: gosto de aprender coisas novas de diferentes áreas, como artesanato, culinária, esportes, e acredito que podemos fazer muitas coisas, basta termos disposição. Sou mãe de um casal de gêmeos, o Plínio e a Isadora, que têm nove anos, e, também, de um menino, o Yuri, de quatro anos. Como podem imaginar, tenho uma vida agitada: aos finais de semanas, adoramos sair para andar de bike, jogar bola, brincar de patinete, entre outras coisas. Além de ser arquiteta e urbanista e licenciada em Matemática, com mestrado e doutorado em Educação Matemática, sou produtora de conteúdo para o Ensino Fundamental e Médio, participando de diversos projetos junto a editoras. Além disso, atendo como psicopedagoga, auxiliando, principalmente, crianças e adolescentes com dificuldades de aprendizagem. Na vida, o equilíbrio entre todas as áreas é fundamental, então se dedique à vida acadêmica, mas vivencie outras experiências também.

Saiba mais em:
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5179053948040618
LinkedIn: https://www.linkedin.com/in/debora-c-b-kirnev-1b2a02100/

RECURSOS DE IMERSÃO

REALIDADE AUMENTADA

Sempre que encontrar esse ícone, esteja conectado à internet e inicie o aplicativo Unicesumar Experience. Aproxime seu dispositivo móvel da página indicada e veja os recursos em Realidade Aumentada. Explore as ferramentas do App para saber das possibilidades de interação de cada objeto.

RODA DE CONVERSA

Professores especialistas e convidados, ampliando as discussões sobre os temas.

PÍLULA DE APRENDIZAGEM

Uma dose extra de conhecimento é sempre bem-vinda. Posicionando seu leitor de QRCode sobre o código, você terá acesso aos vídeos que complementam o assunto discutido

PENSANDO JUNTOS

Ao longo do livro, você será convidado(a) a refletir, questionar e transformar. Aproveite este momento.

EXPLORANDO IDEIAS

Com este elemento, você terá a oportunidade de explorar termos e palavras-chave do assunto discutido, de forma mais objetiva.

EU INDICO

Enquanto estuda, você pode acessar conteúdos online que ampliaram a discussão sobre os assuntos de maneira interativa usando a tecnologia a seu favor.

Quando identificar o ícone de QR-CODE, utilize o aplicativo Unicesumar Experience para ter acesso aos conteúdos on-line. O download do aplicativo está disponível nas plataformas: Google Play App Store

PROVOCAÇÕES INICIAIS

FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADAS À ARQUITETURA

A Física e a Matemática são duas áreas exatas que se complementam, de modo que a Matemática instrumenta a Física, que, por si só, já é aplicada em diversas situações-problemas. Enquanto profissional da área de Arquitetura, você se deparará com diversas situações em que a análise de aplicações da Física e Matemática são imprescindíveis. Desse modo, que competências e habilidades se fazem necessárias nesse tipo de situação?

Há diversas subáreas de conhecimentos para as áreas de Física e Matemática, mas, considerando a integração com a Arquitetura, foram adotados os tópicos que possibilitam uma análise inferencial de situações aplicadas com base em métodos científicos, considerando aplicações práticas nas vivências profissionais.

Você conhece o Edifício Aldar, em Abu Dhabi, conhecido como o edifício esférico? Como foi o desenvolvimento desse projeto audacioso? Vejamos uma fotografia dessa edificação.

Descrição da Imagem: fotografia de um edifício no formato de um corpo redondo.

Para projetar essa edificação, que foi inspirada em cunhas esféricas, foi preciso desenvolver tecnologias de ponta para preparar a fundação, desenvolver as estruturas e compor a pele de vidro. Por ser uma construção inédita, não havia, até a sua concepção, outros edifícios semelhantes. Muitos estudos aplicados de Matemática e Física foram necessários para que a equipe de engenheiros e arquitetos concebesse o projeto e realizasse a execução. Pesquise alguns outros edifícios que você acredita que tenham desafiado físicos(as) e matemáticos(as) em sua construção.

Entre as aplicações de Matemática na Arquitetura, podemos destacar: a obtenção de áreas e volumes de caixas d´água oblíquas por meio de operações vetoriais. Ao relacionar duas grandezas, por exemplo, podemos obter um modelo matemático que exprima uma função e que possibilite analisar um fenômeno por meio de cálculos analíticos e representações gráficas. Ao verificar fenômenos ocorridos em situações como demolições, podemos nos deparar com a análise do movimento, sendo uma aplicação direta dos conceitos de limites e derivadas, em que é possível estudar a taxa de variação. Ao obter dados experimentais, é necessário realizar o tratamento de informação, de modo que seja um método científico válido, além de recorrer a métodos numéricos que auxiliem a tomada de decisões. Ao desenvolver um projeto, é preciso calcular áreas de superfícies e volumes de sólidos, relacionando com as respectivas unidades de medidas, para que sejam expressas em um memorial de descritivo.

Ao aplicar os conceitos da Física, podemos compreender, por exemplo, como escadas, sacadas, entre outras partes de uma edificação se mantêm estável. Além de entender como o sistema estrutural mantém uma edificação em equilíbrio.

Por meio dos estudos da Física e Matemática, podemos conceituar os exemplos apresentados anteriormente, de modo que possamos ter um entendimento a respeito de como é relevante possuir uma base de conhecimento matemático e físico para a compreensão de aspectos que interferem na atuação profissional dentro da Arquitetura.

Dentro da área da Matemática, a compreensão de grandezas vetoriais é relevante tanto para situações que envolvem a Geometria Analítica, que possibilita os estudos de entes geométricos por meio de procedimentos algébricos, quanto na área da Física, relacionada, por exemplo, aos estudos de movimentos bi e tridimensionais, distribuição de forças, equilíbrio e estática.

Em relação ao estudo de funções, elas possibilitam definir condições em que podemos analisar a relação entre grandezas, sendo aplicada dentro da própria Matemática, em estudos de limites, derivadas e integração, e na Física, nos estudos de movimentos unidimensionais, em que analisamos, por exemplo, velocidade, velocidade instantânea e aceleração.

PROVOCAÇÕES INICIAIS

Os limites e as derivadas podem ser aplicados em taxas de variação por meio do estudo de funções. Com relação à integração, podemos recorrer a esse método analítico sempre que não for possível, por meio de relações pré-estabelecidas pela Geometria Plana e Espacial, obter o cálculo de áreas de superfícies e volumes, desde que seja possível estabelecer uma função ou equação associada ao ente geométrico.

Já o cálculo numérico pode ser relacionado ao método estatístico, em que utilizamos a coleta em campo para obtenção de dados. É preciso realizar o tratamento desse tipo de informação e validá-la, minimizando as margens de erros, de modo que seja aceitável o resultado. Além disso, é possível estabelecer funções por meio de métodos numéricos, como, também, obter o cálculo de integrais numéricas.

Uma vez conhecidos os tópicos essenciais da Matemática, podemos discorrer sobre aplicações da Física que dependem dos conceitos da Matemática, limitando as noções de mecânica, em que temos como base as Leis de Newton para lidar com conceitos relacionados ao movimento, ao equilíbrio e à Estática.

Com esse conteúdo, você será capaz de compreender como a Matemática e a Física subsidiam a resolução de situações-problemas relacionadas à Arquitetura, como os cálculos de áreas e volumes por meio da Geometria e das grandezas vetoriais; as relações entre grandezas por meio de funções; a coleta de dados e as análises de erros; a interpolação numérica e os ajustes de curvas; as unidades de medidas; as aplicações da Dinâmica, Cinemática, equilíbrio e Estática.

Aprendamos juntos sobre esses conceitos, de modo que você seja um(a) profissional mais preparado(a) para lidar com problemas aplicados à Arquitetura.

CAMINHOS DE APRENDIZAGEM

1 13
VETORES E EQUAÇÕES VETORIAIS DA RETA E DO PLANO

2 43
EQUAÇÕES E FUNÇÕES REAIS

3 75
LIMITES E DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

4 109
NOÇÕES DE INTEGRAÇÃO: CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

5 147
NOÇÕES DE CÁLCULO NUMÉRICO: ERRO, SISTEMA DE NUMERAÇÃO, ZERO DE EQUAÇÃO

6 181
NOÇÕES DE CÁLCULO NUMÉRICO: INTERPOLAÇÃO, AJUSTE DE CURVAS E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

7 217
GRANDEZAS FÍSICAS E UNIDADES, NOÇÕES DE CINEMÁTICA E DINÂMICA

8 243
NOÇÕES DE EQUILÍBRIO E MOVIMENTO DOS CORPOS

9 279
NOÇÕES DE ESTÁTICA

1 Vetores e equações vetoriais da reta e do plano

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, trataremos sobre vetores, aritmética vetorial e suas representações geométricas. Iniciamos ao apresentar conceitos, definições e representações gráficas relacionadas aos vetores. Para tanto, é preciso compreender o conceito relacionado a grandezas vetoriais, pois é imprescindível a diferenciação das grandezas escalares. Entendido isso, as formas de representação geométricas são aspectos relevantes para se associarem às operações algébricas, desse modo, utilizamos o plano cartesiano bidimensional e o sistema de coordenadas tridimensional para ilustrar tais representações. Há aplicações, por exemplo, na análise de distribuição de forças, que exigem as operações com vetores, assim, é preciso realizar as adições, subtrações e multiplicações por escalares; além de realizar os diferentes produtos entre vetores, seja o produto escalar e a análise de ângulo entre vetores, o produto vetorial e o produto misto entre eles. Por fim, para relacionar o estudo de vetores com a Geometria Analítica, apresentamos as equações vetoriais da reta e do plano. Bons estudos!

A empresa ArQDesign possui uma equipe de análise e viabilidade de execução de obras, e você foi contratado(a) para fazer parte da equipe de arquitetos. Dentro das suas atribuições, está a validação dos cálculos executados para os projetos complementares ao projeto arquitetônico de cada obra, dessa forma, será preciso analisar as propostas apresentadas com base nos principais tópicos da Matemática e da Física aplicadas à Arquitetura. Os primeiros trabalhos que serão executados já estão em andamento, como verificar o volume de uma caixa d'água na forma de um paralelepípedo oblíquo, entre outros. Quais são os conceitos necessários para validar o cálculo do volume? O que são grandezas vetoriais? Como são aplicadas na Arquitetura?

Para responder a essas questões, precisamos conhecer os vetores e, principalmente, as suas interpretações geométricas para podermos relacionar aos cálculos de áreas e volumes de formas, como a da caixa d'água. Os vetores são um tipo de grandeza que possui diversas aplicações não somente na Matemática, mas, também, na Química, na Física, nas Engenharias e na Arquitetura. Neste último caso, por exemplo, pode ser utilizado para dimensionar vigas e treliças para a sustentação de estruturas. De modo mais amplo, vetores são ferramentas que auxiliam outros cálculos aplicados.

O projeto da caixa d'água que você precisa validar tem o formato de um paralelepípedo oblíquo, que será construído com placas de concreto com dimensões de 3 metros de comprimento, 2 metros de profundidade e 1 metro de altura. A inclinação da lateral da caixa d'água forma um ângulo de 45° com a base. A partir disso, e desprezando o espaço ocupado pelas vigas de sustentação, aplicando as grandezas vetoriais, como seria a representação desse objeto no sistema de coordenadas cartesianas?

O primeiro passo é definir coordenadas cartesianas com as dimensões dadas, considerando cada metro linear uma unidade dos eixos, ou seja, para inserir no sistema de coordenadas, adotamos os pontos do plano da base inferior: $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(3,2,0)$. Na sequência, representamos o ângulo de 45° com a base e altura de 1 unidade, assim, podemos determinar o plano da base superior indicado pelas coordenadas $(1,0,1)$, $(4,0,1)$, $(1,2,1)$, $(4,2,1)$. Com isso, podemos representar os vetores que correspondem às arestas que dimensionam o sólido, dadas pelos vetores $u=(3,0,0)$, $v=(0,2,0)$ e $w=(1,0,1)$. Para ilustrar, representamos na imagem a seguir:

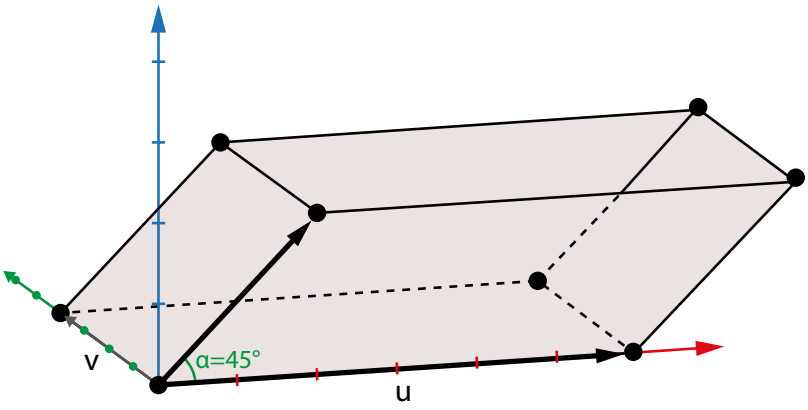


Figura 1 - Representação da caixa d'água no sistema de coordenadas
Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: Descrição da imagem: desenho de uma caixa d'água no sistema de coordenadas formado pelos vetores u, v e w, partindo da origem.

REALIDADE AUMENTADA

Representação da caixa d'água no sistema de coordenadas

Para compreender os vetores, consideraremos a imagem indicada a seguir:

Figura 2 - Vista da ponte Estrela do Cabo / Fonte: Pixabay (2019, on-line).

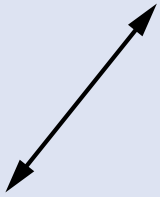
Descrição da Imagem: uma ponte de vias duplas sobre um rio que conecta duas regiões rurais arborizadas.

Na imagem, temos a vista da ponte Estrela do Cabo, parte de uma rodovia. Nela, temos direção de duplo sentido, em que trafegam os veículos. Se considerarmos um determinado trecho como um marco inicial e outro como final, podemos obter a sua medida de comprimento, a qual chamamos de módulo. Quando definimos uma direção, um sentido e o módulo, podemos atribuir uma grandeza vetorial para essa representação. Outros exemplos são a força, o torque, os campos elétricos e magnéticos. Representamos, geometricamente e algebricamente, uma grandeza vetorial por meio segmento de reta orientado, o qual denominamos de vetor. Na imagem da ponte Estrela do Cabo, você pode fazer essas indicações.

Outras grandezas caracterizadas por uma medida ou módulo, com valores numéricos compostos por números reais, são chamadas de grandezas escalares, como, por exemplo, o tempo, a massa e a temperatura.

DIÁRIO DE BORDO

Para definirmos os vetores geometricamente, adotamos conceitos primitivos, como ponto, reta e plano. Observe a representação a seguir:

Elemento	Nomenclatura	Representação
	Ponto: elemento adimensional, ou seja, não possui dimensão.	Letras maiúsculas do alfabeto: A, B, C, ...
	Reta: elemento unidimensional, composta por um conjunto infinito de pontos.	Letras minúsculas do alfabeto: a, b, c, ...
	Plano: elemento bidimensional, composto por um conjunto infinito de pontos.	Letras do alfabeto grego: α, β, π, ...

Quadro 1 - Elementos primitivos: ponto, reta e plano / Fonte: a autora.

A partir desses elementos primitivos, definimos segmentos. Para isso, dados dois pontos, de modo que tenhamos um trecho da reta delimitado por esses pontos, por exemplo, A e B, podemos adotar dois sentidos: $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$, obtendo um segmento orientado, conforme ilustrado na imagem a seguir.

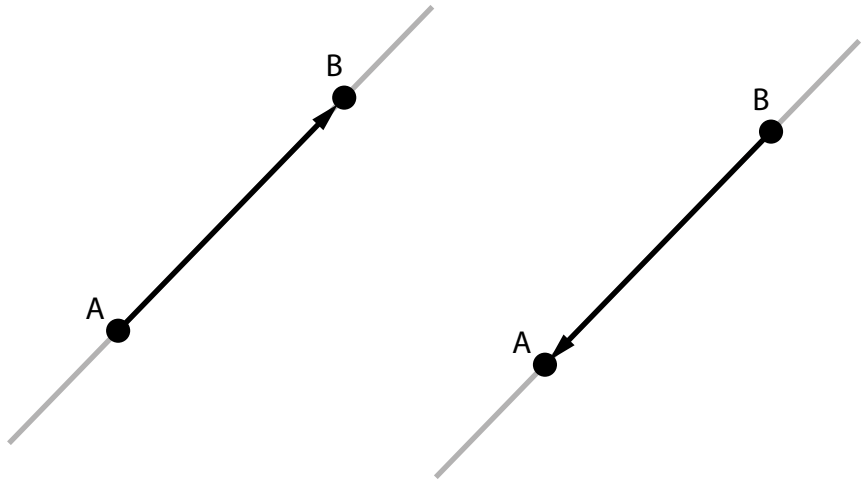
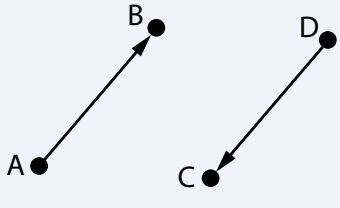
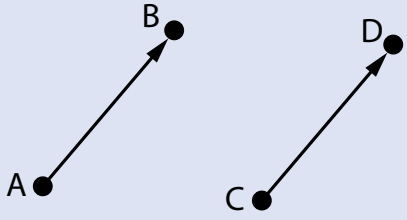


Figura 3 - Segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de dois segmentos orientados em sentidos opostos, indicados por $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$.

Quando consideramos a distância entre os pontos A e B, referimo-nos ao módulo, ou seja, à medida de comprimento do segmento orientado. A direção é entendida quando verificamos a inclinação da reta suporte do segmento orientado, que pode ser horizontal, vertical ou inclinada. O sentido é determinado a partir de um ponto inicial, que denominamos origem, e um ponto final, chamado de extremo. Podemos ter diferentes tipos de segmentos orientados:

Representação	Classificação
A~B	Segmento nulo: são segmentos que possuem módulo igual a zero.
	Segmentos opostos: são segmentos que possuem a mesma direção, o mesmo módulo, mas possuem sentidos opostos.

Representação	Classificação
	Segmentos equipolentes: são segmentos que possuem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo módulo.

Quadro 2 - Classificação de segmentos / Fonte: a autora.

Considerando os conceitos geométricos apresentados, definamos o que é um vetor.

> Vetor é o conjunto dos segmentos orientados, denominado classe de equipolência, no plano, no espaço tridimensional ou no espaço n-dimensional que possui a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo.

Podemos ilustrar a definição apresentada da seguinte forma:

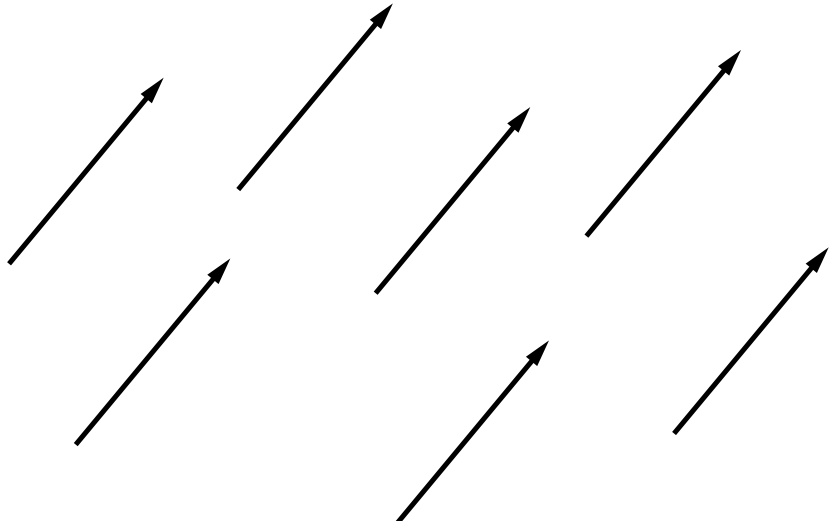


Figura 4 - Classe de equipolência de um vetor / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de uma classe de vetores representada por sete vetores equipolentes, compostos por sete setas inclinadas na diagonal, dispostas no mesmo módulo, na mesma direção e no mesmo sentido.

O que diferencia um vetor de um número escalar é que este último não possui direção e sentido, apenas o módulo, enquanto o vetor, necessariamente, precisa possuir direção, sentido e módulo. Observamos que o comprimento de um vetor, também, é denominado norma de um vetor.

Dado um vetor definido por um segmento orientado, podemos indicá-lo como $v = \overline{AB}$, sendo A o ponto inicial ou origem, e B, o ponto final ou extremo. Ressaltamos que o vetor nulo é indicado por $0 = \overline{AB}$, em que os pontos A e B são coincidentes.

Os vetores podem ser representados geometricamente no plano, também denominado plano bidimensional, e no espaço tridimensional. Quanto às operações vetoriais, podem ser realizadas no espaço n-dimensional. Iniciemos as representações de vetores bidimensionais, em que utilizamos o plano cartesiano para representá-los. No exemplo ilustrado a seguir, temos os vetores u e v, pertencentes à mesma classe de equipolência:

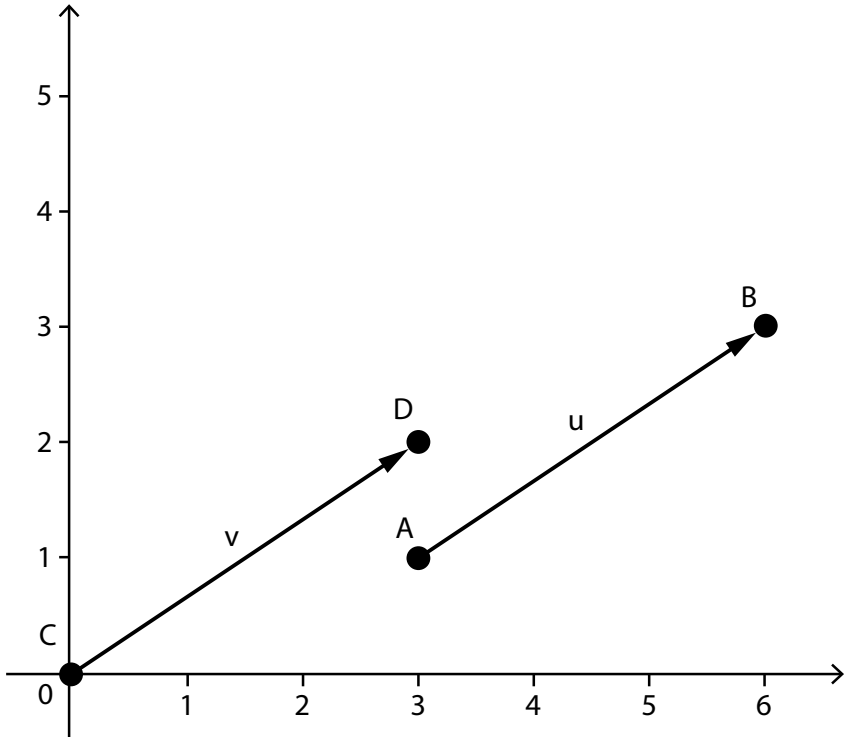


Figura 5 - Componentes de um vetor no plano / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de dois vetores equipolentes, que possuem mesma direção e mesmo sentido, partindo de posições diferentes, representados no plano cartesiano bidimensional, sendo que um parte da origem, e o outro foi transladado.

O vetor u possui, como ponto inicial, $A(3,1)$ e, como ponto final, o ponto $B(6,3)$, enquanto o vetor v possui ponto inicial na origem, indicado por $C(0,0)$, e ponto final em $D(3,2)$. Neste caso, o vetor v é o representante dessa classe de vetores, em que indicamos apenas as componentes do vetor $v = (3,2)$; qualquer outro vetor dessa classe foi transladado, de modo que, para se obter a componente, aplicamos

a operação de ponto final menos ponto inicial. De modo genérico, podemos definir as coordenadas da componente de um vetor no plano da seguinte forma:

> Dado um vetor u, com origem em um ponto (a,b) e extremidade em um ponto (c,d), a componente dele é dada por $(c-a,d-b)$.

Para calcular o módulo de um vetor, recorremos à relação métrica conhecida como Teorema de Pitágoras.

O que é o Teorema de Pitágoras? Trata-se de um teorema aplicado, na Trigonometria, em um triângulo retângulo e relaciona as medidas da hipotenusa com as dos catetos, o que se enuncia da seguinte forma: "em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

Vejamos a ilustração de um triângulo retângulo aplicado para determinar o módulo de um vetor.

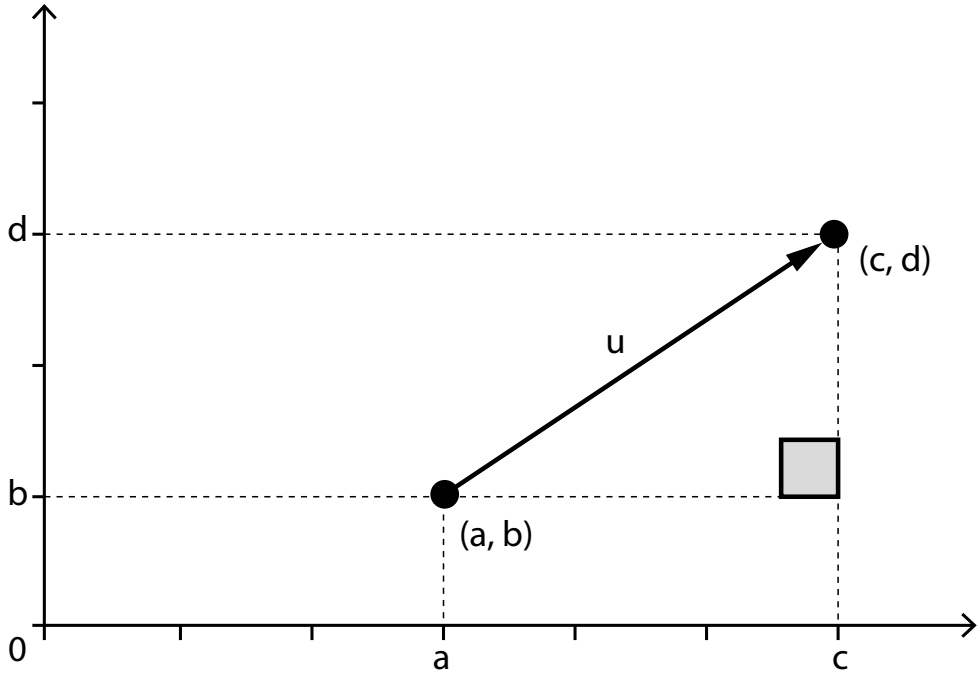


Figura 6 - Triângulo retângulo definido pelo vetor / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, de um vetor transladado da origem, indicando a formação de um triângulo retângulo, cujas coordenadas indicam os catetos, e o vetor u indica a hipotenusa desse triângulo.

O módulo de um vetor é equivalente à distância entre o ponto inicial e o ponto final. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos $|u|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$, considerando um vetor u com ponto inicial $A(3,5)$ e ponto final $B(7,4)$. O módulo é dado por $|u|=\sqrt{(7-3)^2+(4-5)^2}=\sqrt{4^2+(-1)}=\sqrt{17}$. Observamos que, quando o módulo de um vetor possui uma unidade de medida, é denominado vetor unitário.

No caso de um vetor unitário possuir a mesma direção e o mesmo sentido de outro vetor, ele é chamado de versor. Podemos obter o versor de um vetor ao dividir as componentes pelo seu módulo, ou seja, $\frac{u}{|u|}$. O resultado é um vetor unitário com a mesma direção e o mesmo sentido do vetor u. Se considerarmos que o vetor $u=(2,3)$, obtemos o módulo $|u|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, assim, o versor será dado por $\frac{u}{|u|}=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)=\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

De modo análogo aos vetores representados no plano, podemos representar os vetores em um espaço tridimensional no sistema de coordenadas. Vejamos uma ilustração:

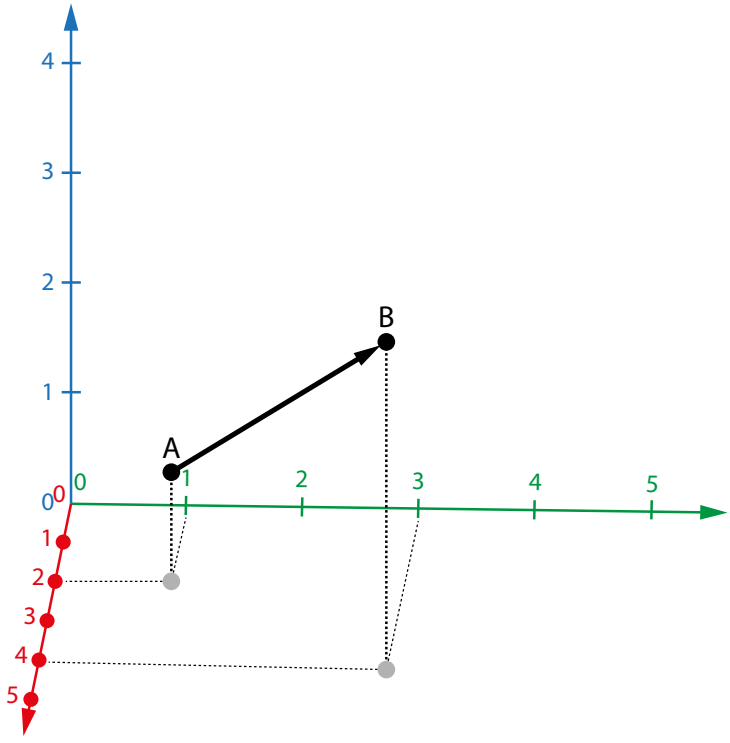


Figura 7 - Representação de vetor tridimensional / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de um vetor no sistema de coordenadas tridimensional, deslocado da origem com ponto inicial em A (1, 1, 1) e ponto final em B (4, 3, 2).

A representação do vetor é dada nos eixos coordenados $\overline{Ox}$, $\overline{Oy}$ e $\overline{Oz}$, cuja origem é indicada por $(0,0,0)$. O ponto $A(2,1,1)$ é o ponto inicial do vetor, e o ponto $B(4,3,2)$ é o ponto final do vetor. Desse modo, podemos obter a componente do vetor realizando a operação de ponto final menos ponto inicial, que resultará em um vetor de coordenadas $v=(2,2,1)$, que será o representante da classe de vetores. Podemos calcular o módulo desse vetor da seguinte forma: $|u|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$. Se generalizarmos o cálculo do módulo de um vetor no espaço e tomarmos um ponto inicial do vetor, dado por $A(a,b,c)$, e um ponto final, dado por $B(d,e,f)$, assim, $|u|=\sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}$.

O versor de um vetor tridimensional é dado por $\frac{u}{|u|}$, similar ao que ocorre com um vetor bidimensional.

Os vetores possuem direção, sentido e módulo e podem ser expressos no plano bidimensional e no espaço tridimensional, podendo-se calcular o seu módulo. Além dessa exploração geométrica, podemos representar os vetores de forma analítica e, também, realizar a aritmética vetorial.

Um vetor pode ser associado a um par ordenado no plano bidimensional, também denominado R^2, de modo que possamos obter $u = (x, y)$. Representado na forma de componente, todo vetor no R^2 pode ser escrito em função dos versores $i = (1, 0)$ e $j = (0,1)$, também denominados base canônica. Desse modo, $u = (x, y) = xi + yj$, em que ocorre a decomposição do vetor, e se apresenta na forma de uma expressão analítica do vetor, por exemplo, o vetor $u = (3, -2) = 3i - 2j$.

De modo análogo, podemos associar uma terna do espaço tridimensional, ou seja, o R^3, de modo a obter $u = (x, y, z) = xi + yj + zk$. A base canônica desse espaço é dada por $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$, assim, podemos representar a expressão analítica do vetor da seguinte forma: $u = (x, y, z) = xi + yj + zk$. Exemplificando, temos que $u = (1, -3, -4) = i - 3j - 4k$.

Utilizando a componente dos vetores ou, ainda, a expressão analítica, podemos aplicar a aritmética vetorial, como a adição, subtração e multiplicação por escalar. Vejamos cada um dos casos.

a) **Adição de vetores**: essa operação pode ser aplicada a deslocamentos, em que um ponto inicial seria a origem, a adição dos vetores $u + v$ seria o deslocamento, e um ponto final seria o destino. Pode ser expresso geometricamente da seguinte forma:

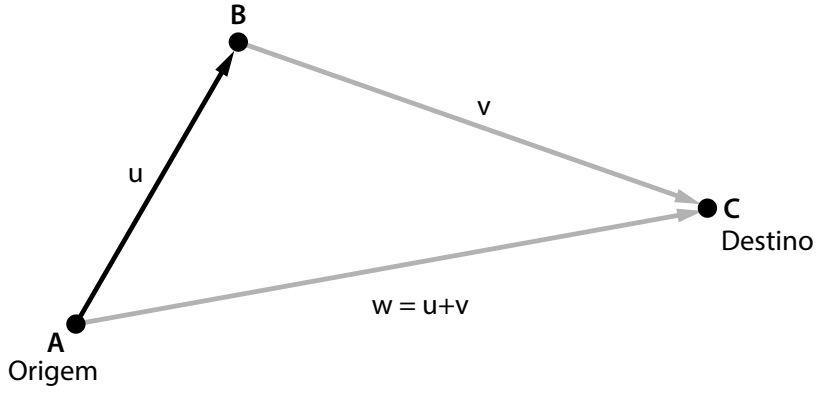


Figura 8 - Representação geométrica da adição de vetores / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: nesse caso, consideramos um ponto de partida, indicado pelo ponto A, e adotamos um representante do vetor u, com origem neste ponto. Adotamos um ponto B, que é extremo do vetor u e é origem do vetor v. Por fim, determinamos um ponto C, que é extremo do vetor v. Ao adotarmos o vetor w com a origem no ponto A e extremo no ponto C, temos a representação da soma geométrica dos vetores $u + v$.

Ao aplicar somas geométricas sucessivas, realizamos deslocamentos sucessivos, o que se denomina regra da poligonal, em que o vetor resultante consiste no ponto inicial do primeiro vetor e no ponto final do último vetor.

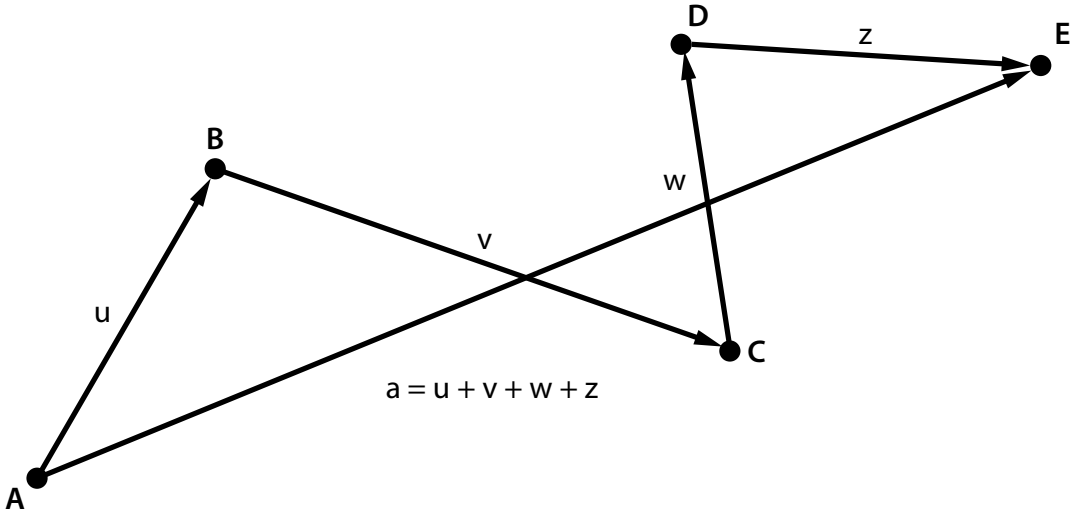


Figura 9 - Representação geométrica da adição de vetores sucessivos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de uma representação poligonal da adição de vetores, representada por a = u + v + w + z, resultando em uma forma geométrica composta por triangulações de vetores e uma reta diagonal do ponto inicial ao ponto final.

Uma das aplicações das representações geométricas de vetores se dá em sistemas estruturais de vetores ativos, que são sistemas de componentes lineares, em que a distribuição de forças são realizadas vetorialmente. Vejamos os exemplos a seguir:

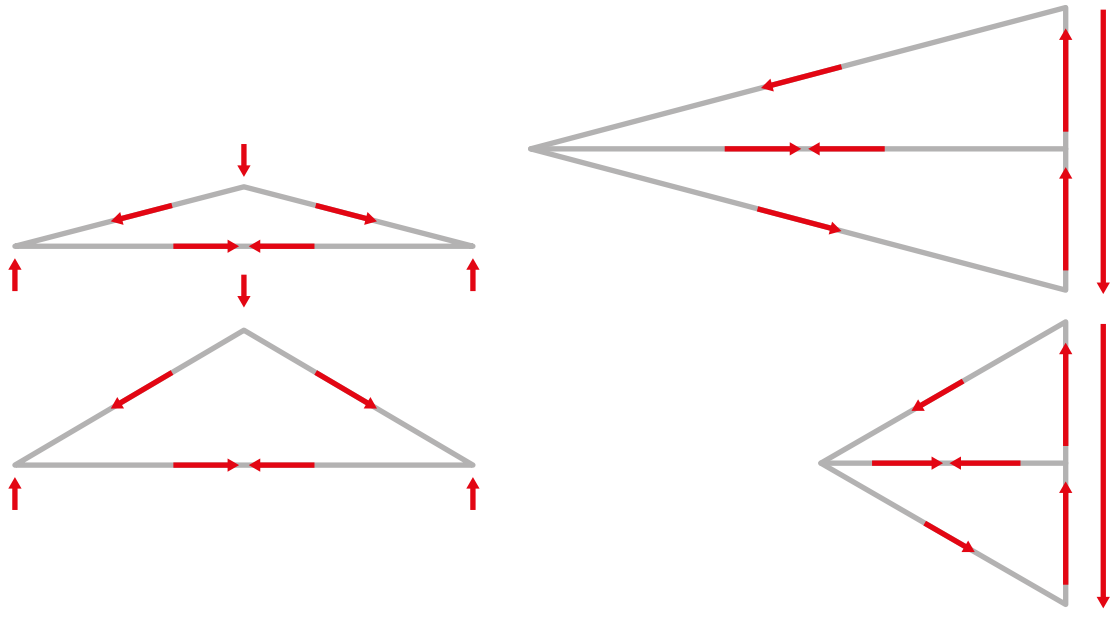


Figura 10 - Sistema de separação vetorial / Fonte: Engel (2001, p. 139).

Descrição da Imagem: desenho de uma representação poligonal da distribuição de forças em sistemas estruturais na forma triangular por meio de triangulações de vetores.

Em relação à adição algébrica, realizamos a adição de suas componentes tanto na forma de coordenadas quanto na forma analítica, representada na base canônica. As adições ocorrem de forma similar nos espaços n-dimensionais. Ilustremos a operação no espaço tridimensional, de modo que, dado $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$, teremos:

I. Na forma de coordenadas: $u+v=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$, considerando $u=(2,-4,7)$ e $v=(5,2,-3)$, temos que $u+v=(2+5,-4+2,7-3)=(7,-2,4)$.

II. Na base canônica: $u+v=(x_1+x_2)i+(y_1+y_2)j+(z_1+z_2)k$, assim, se $u=2i-4j+7k$ e $v=5i+2j-3k$, logo, $u+v=(2+5)i+(-4+2)j+(7-3)k=7i-2j+4k$.

Considere os vetores , e bi ou tridimensionais. A operação de adição de vetores atende às seguintes propriedades:

- Comutativa: $u+v=v+u$.
- Associativa: $u+(v+w)=(u+v)+w$.
- Elemento neutro: $u+0=0+u=u$. O vetor nulo é indicado por 0. No R, seria representado por $(0,0,0)$.

- Elemento oposto: dado u, existe $-u$, tal que $u+(-u)=(-u)+u=0$. Geometricamente, o vetor oposto possui a mesma direção, o mesmo módulo, mas tem sentido oposto.
- Desigualdade triangular: $|u+v| \leq |u|+|v|$.

A aplicação da propriedade comutativa é conhecida como regra do paralelogramo na adição de vetores, de modo que:

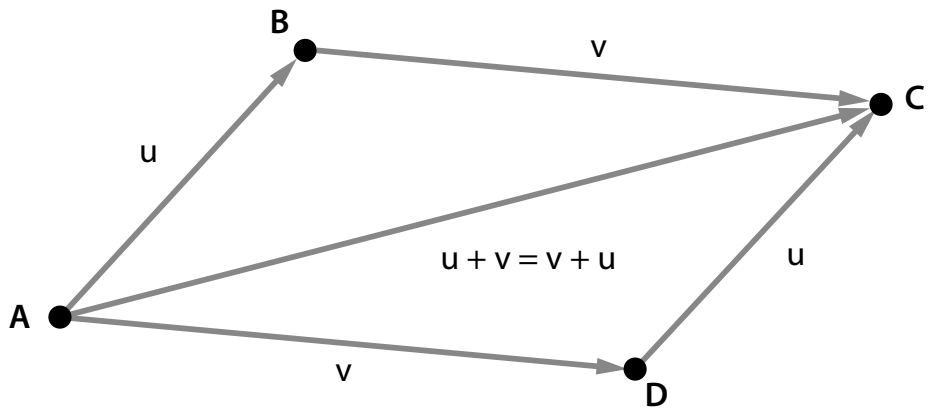


Figura 11 - Aplicação da regra do paralelogramo para adição de vetores / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho da representação da regra do paralelogramo para a adição dos vetores $u+v = v+u$, representando a propriedade comutativa.

b) Subtração de vetores: é uma operação análoga à adição, de modo que seria um caso particular com um vetor oposto, ou seja, $u - v = u + (-v)$, podendo ser expresso, geometricamente, da seguinte forma:

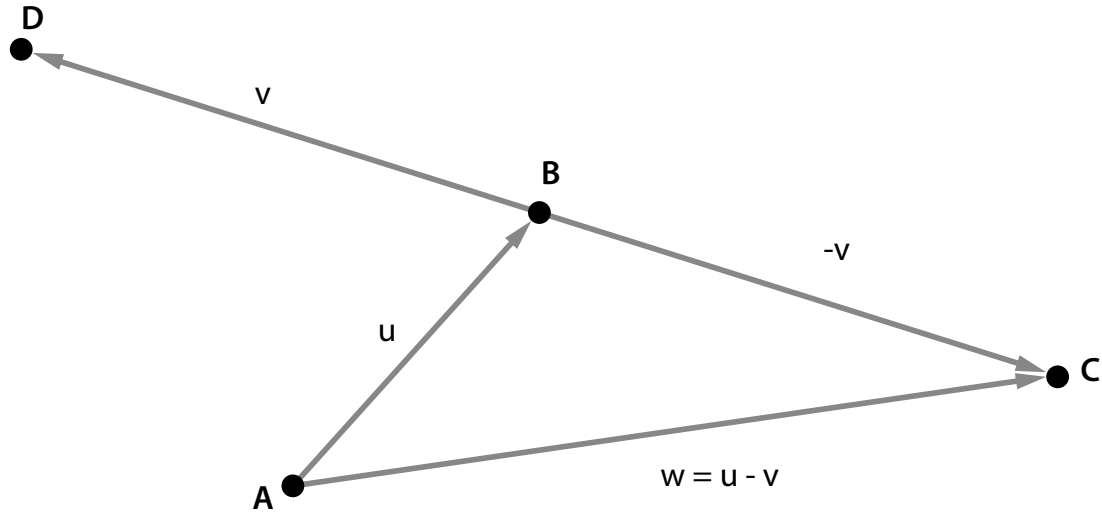


Figura 12 - Representação geométrica da subtração de vetores / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho da representação da subtração de vetores a partir do desenho de vetores u e v para indicar o vetor resultante, w = u - v.

Algebricamente, temos que a subtração de vetores no espaço tridimensional, com $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, é dada por:

I. Na forma de coordenadas: $u - v = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$. Considerando $u = (2, -4, 7)$ e $v = (5, 2, -3)$, temos que $u - v = (2 - 5, -4 - 2, 7 + 3) = (-3, -6, 10)$.

II. II)Nabasecanônica: $u - v = (x_1 - x_2)i + (y_1 - y_2)j + (z_1 - z_2)k$, assim, se $u = 2i - 4j + 7k$ e $v = 5i + 2j - 3k$, logo $u - v = (2-5)\,i + (-4-2)\,j + (7+3)\,k = -3\,i - 6\,j + 10k$.

c) Multiplicação de um escalar por um vetor: essa operação está associada a deslocamentos sucessivos no mesmo sentido ou no sentido oposto, dependendo do sinal do número escalar. Vejamos a ilustração geométrica para quatro deslocamentos sucessivos de um vetor u:

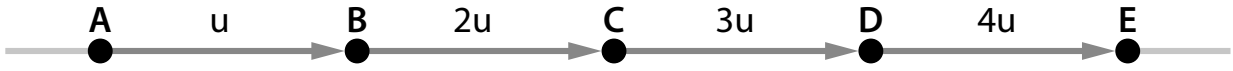


Figura 13 - Representação geométrica da multiplicação de um escalar por um vetor / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho da representação da operação de multiplicação por escalar de um vetor, indicando o vetor $u,\ 2u,\ 3u,\ 4u$ sobre a mesma reta suporte e no mesmo sentido.

Considere o número escalar k e um vetor v, temos as seguintes situações:

I. ku e u são vetores paralelos, ou seja, possuem a mesma direção.
II. Se $k > 0$, ou seja, é um número positivo, então, ku e u possuem o mesmo sentido.
III. Se $k < 0$, ou seja, é um número negativo, então, ku e u possuem sentidos opostos.
IV. Se $k = 0$, então, corresponde ao vetor nulo.

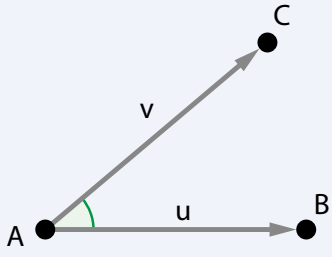
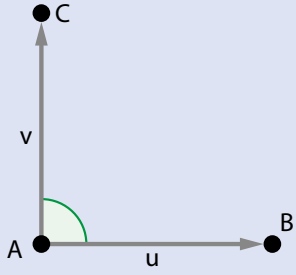
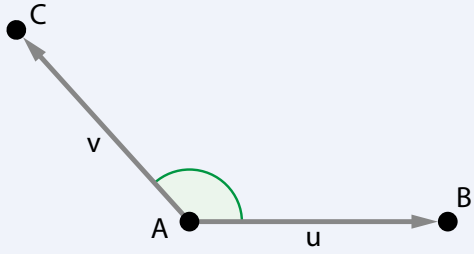
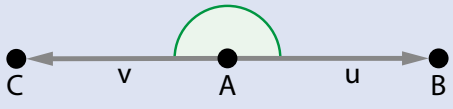
Considere os vetores u e v bi ou tridimensionais e k e l escalares. A operação de multiplicação de um escalar por um vetor atende às seguintes propriedades:

- **Associativa**: $k(lu) = (kl)u$.
- **Elemento neutro da multiplicação**: $1u = u$.
- **Distributiva com escalar**: $(k+l)v = kv + lv$.
- **Distributiva com vetores**: $k(u+v) = ku + kv$.

Algebricamente, a multiplicação de um escalar por um vetor ocorre multiplicando as coordenadas do vetor pelo número. Adote $u = (2,\ -4,\ 7)$. Temos que $4u = (42,\ 4(-4),\ 47) = (8,\ -16,\ 28)$, ou seja, o módulo desse vetor é o quádruplo de u.

O ângulo entre dois vetores é medido considerando a menor abertura entre eles, com variação de $0 \leq \theta \leq 180$. Destacamos, a seguir, as posições relevantes:

Posição	Classificação
	Ângulo nulo, não há a abertura de ângulo, logo $\theta = 0^o$. Observe que os vetores u e v possuem a mesma direção e o mesmo sentido.

Posição	Classificação
	Ângulo agudo, a abertura do ângulo varia de acordo com $0 < \theta < 90^{o}$
	Ângulo reto, a abertura do ângulo é de $\theta = 90^{o}$.
	Ângulo obtuso, a abertura do ângulo varia de acordo com $90^{o} < \theta < 180^{o}$.
	Ângulo raso, a abertura do ângulo é de $\theta = 180^{o}$. Observe que os vetores u e v possuem a mesma direção, mas possuem sentidos opostos.

Quadro 3 - Posição de ângulo entre dois vetores / Fonte: a autora.

Há situações em que é preciso determinar o ângulo entre vetores. Existem algumas formas de acontecer isso. Optemos por utilizar o produto escalar entre vetores, que pode ser relacionado com o cosseno do ângulo entre vetores e, a partir disso, determiná-lo. As operações do produto escalar ocorrem de forma similar nos espaços n-dimensionais. Ilustraremos essa operação no espaço tridimensional, de modo que, dado $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, temos o produto escalar do vetor u pelo vetor v indicado em termos notacionais, como $u \text{"} v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ Exemplificando, dados os vetores $u = (2, -4, 7)$ e $v = (5, 2, -3)$, o produto escalar será $u \bullet v = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 10 - 8 - 21 = -19$. Observe que o produto escalar entre vetores resulta em um número real, essa é a principal característica desse tipo de produto.

Considere os vetores u, v e w bi ou tridimensionais e k escalar. O produto escalar de vetores atende às seguintes propriedades:

- **Comutativa**: $u \bullet v = v \bullet u$.
- **Produto escalar de um vetor por ele mesmo**: $u \bullet u = |u|$.
- **Distributiva**: $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w$.
- **Multiplicação por escalar de um produto escalar**: $(ku) \bullet v = u \bullet (kv) = k(u \bullet v)$.
- **Desigualdade Schwarz**: $| u \text{"} v | \leq | u | \cdot | v |$

O que são relações trigonométricas?

Trata-se de relações aplicadas, na Trigonometria, em triângulo retângulo e que relacionam as medidas de um ângulo de referência com a hipotenusa e os catetos, adotando a seguinte representação:

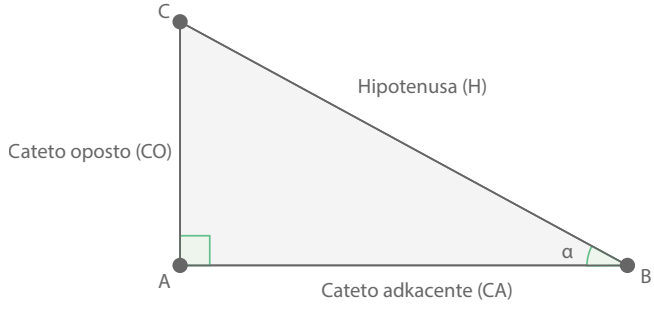


Figura 14 - Representação de um triângulo retângulo / Fonte: a autora.

Descrição da imagem: desenho representando um triângulo retângulo, com a hipotenusa, um ângulo de referência e os respectivos catetos.

O ângulo α de referência foi indicado no vértice B do triângulo retângulo, assim, podemos definir o seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg) do ângulo pelas relações a seguir:

$$sen(\alpha) = \frac{CO}{H} \quad | \quad \cos(\alpha) = \frac{CA}{H} \quad | \quad tg(\alpha) = \frac{CO}{CA}$$

O produto escalar também é equivalente à expressão $u \bullet v = |u| \cdot |v| \cos\theta$, em que θ corresponde ao ângulo entre os vetores u e v. Podemos evidenciar o cosseno do ângulo entre os vetores da seguinte forma: $\cos(\theta) = \dfrac{u \bullet v}{|u| \cdot |v|}$. Uma vez determinado o cosseno do ângulo, podemos ativar a função inversa arccosseno, indicada por $\cos^{-1}$ em uma calculadora científica configurada para medir ângulos em graus, e, com isso, determinamos os ângulos entre os vetores. Observe uma calculadora ilustrada na imagem ao lado e note que, ao usar a tecla shift, temos a função arccosseno.

Temos o ângulo entre dois vetores sobre uma variação de $0^o \leq \theta \leq 180^o$, desse modo, podemos atribuir que, em $\cos(\theta) = \dfrac{u \bullet v}{|u| \cdot |v|}$, temos:

- Se $u \bullet v < 0$, então $\cos(\theta) < 0$, assim $90^o < \theta < 180^o$, e o ângulo é obtuso.
- Se $u \bullet v = 0$, então $\cos(\theta) = 0$, assim $\theta = 90^o$, e o ângulo é reto, também denominado ortogonal.
- Se $u \bullet v > 0$, então $\cos(\theta) > 0$, assim $0^o < \theta < 90^o$, e o ângulo é agudo.

Para exemplificar como determinamos o ângulo entre dois vetores, adotaremos vetores do R^2, entretanto, os procedimentos são similares em outros espaços vetoriais. Considere os vetores $u = (2, -4, 7)$ e $v = (5, 2, -3)$, qual é o ângulo formado pelos vetores?

Primeiramente, realizaremos uma representação geométrica para ilustrar os vetores no R^2:

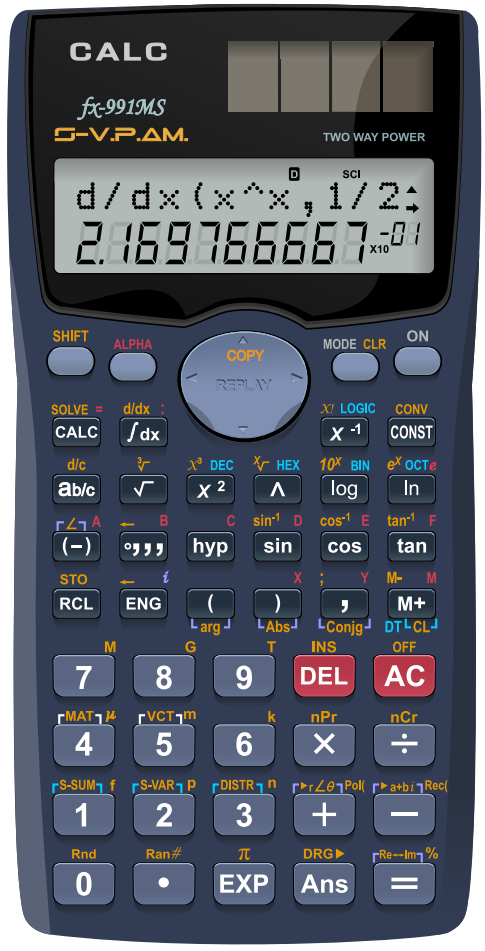


Figura 15 - Ilustração de uma calculadora científica
Fonte: Pixabay (2017, on-line).

Descrição da Imagem: imagem de uma calculadora científica, a qual possui as funções trigonométricas e as suas inversas.

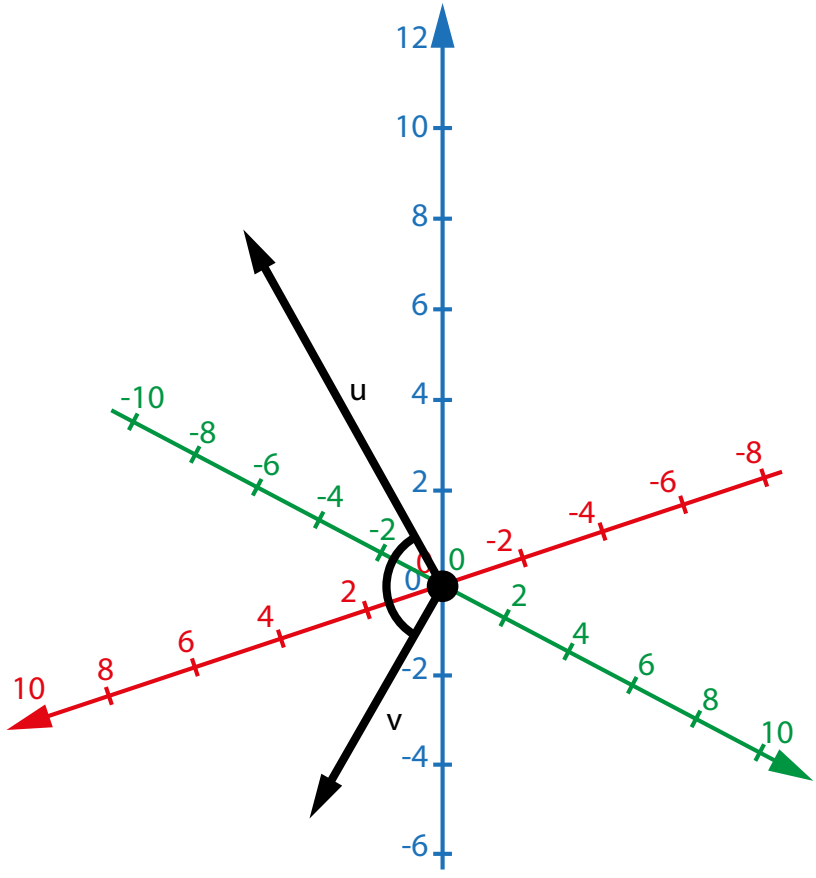


Figura 16 - Representação dos vetores u e v no R^3. / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho ilustrando o ângulo entre os vetores u e v no sistema de coordenadas tridimensional.

Considerando $u = (2, -4, 7)$ e $v = (5, 2, -3)$, podemos obter o produto escalar e os respectivos módulos dos vetores u e v, de modo que:

1. $u \cdot v = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 10 - 8 - 21 = -19$.
2. $|u| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}$.
3. $|v| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$.

A partir disso, podemos aplicar a relação que envolve o cosseno do ângulo entre vetores e o produto escalar para determinar o ângulo entre os vetores, sendo que:

4. $\cos(\theta) = \dfrac{u \bullet v}{|u| \cdot |v|} = \dfrac{-19}{\sqrt{69} \cdot \sqrt{38}} \simeq -0,371$.
5. $\cos^{-1}(\theta) \simeq 111,78^{\circ}$.

Isso quer dizer que o ângulo entre os vetores u e v é obtuso e mede, aproximadamente, $111,78^{o}$.

Outro tipo de operação envolvendo vetores é o produto vetorial, dados os vetores u e v, esse produto é indicado por uxv (lê-se: u vetorial v). O resultado dessa operação é um vetor ortogonal ao plano que contém os vetores dados. O sentido é determinado pela regra da mão direita, como ilustrado na imagem a seguir, em que se posicionam os vetores u e v, e o polegar indica o sentido do vetor resultante do produto vetorial. Vejamos:

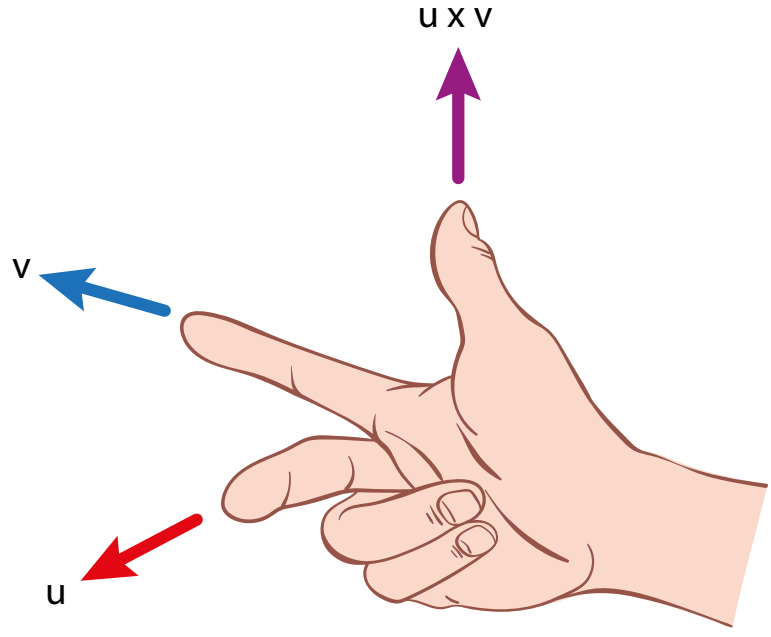


Figura 17 - regra da mão direita aplicada ao produto vetorial
Fonte: adaptada de Wikimedia Commons (2016, on-line).

Descrição da Imagem: desenho ilustrativo da aplicação da regra da mão direita, em que o dedo médio representa a posição do vetor u; o dedo indicador representa o vetor v; e o polegar, o resultado do produto vetorial.

Ao realizar as operações uxv e vxu, temos como resultado vetores com o mesmo módulo e a mesma direção, mas com sentidos opostos. Uma das relações com essa operação é dada por $|uxv|=|u|\cdot|v|\cdot sen(\theta)$, sendo θ o ângulo formado entre os vetores u e v.

O que são determinantes?
Precisamos considerar as matrizes do tipo quadrada. O determinante é uma função que associa um número real a uma matriz quadrada. Para saber mais sobre esse tema, estude a coletânea disponível no QR Code a seguir.

Dados os vetores, $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$, e considerando os versores i, j e k o produto vetorial, aplica-se o cálculo de determinante, de modo que $uxv=(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1)i-(x_1\cdot z_2-x_2\cdot z_1)j+(x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1)k$. Considerando $u=(2,-4,7)$ e $v=(5,2,-3)$, podemos obter o produto vetorial:

$$uxv=\left[(-4)\cdot(-3)-2\cdot 7\right]i-\left[2\cdot(-3)-5\cdot 7\right]j+\left[2\cdot 2-5\cdot(-4)\right]k$$

$$uxv=(12-14)i-(-6-35)\,j\,+(4+20)k$$

$$uxv=-\,2\,i\,+41\,j\,+24\,k=(-2,\ 41,\ 24)$$

Observe que o resultado de um produto vetorial é um vetor. Ao aplicarmos o módulo de um produto vetorial, temos uma interpretação geométrica da área do paralelogramo formado pela dimensão dos vetores do produto vetorial. Considere a representação geométrica a seguir:

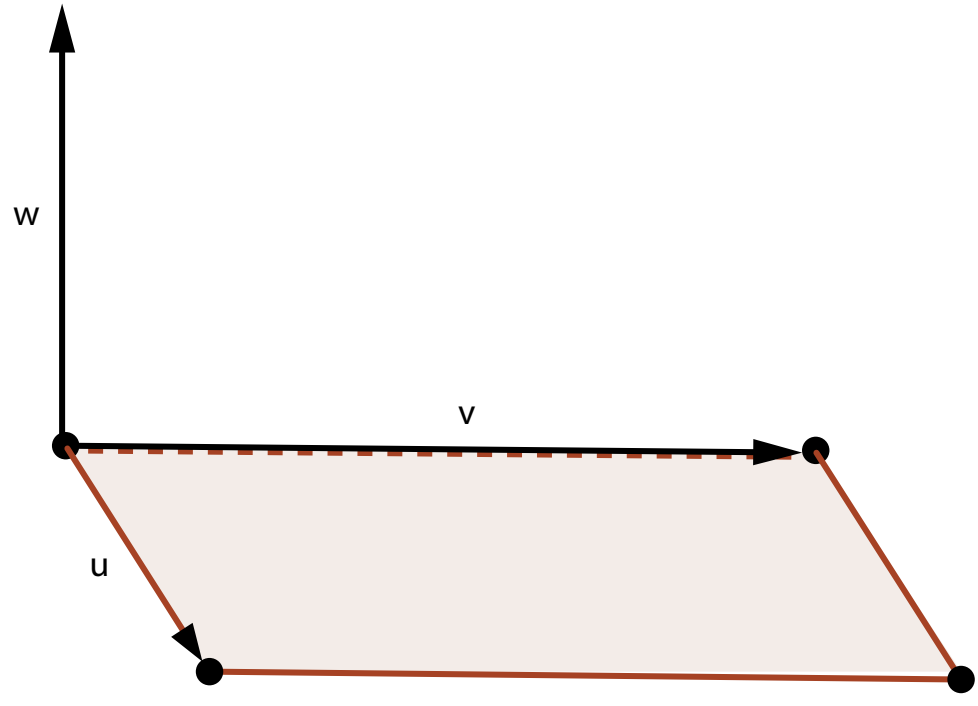


Figura 18 - Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho ilustrativo do paralelogramo formado pelos vetores u, v; e o vetor w é resultado do produto vetorial desses vetores e é ortogonal ao paralelogramo, ou seja, o vetor w intercepta o plano, formando um ângulo reto.

Nesse caso, os vetores u e v formam um paralelogramo. Ao realizar o produto vetorial, temos $w=uxv$, como um vetor ortogonal aos vetores u e v. Ao aplicarmos o módulo, isto é, $|w|$, obtemos o compri-

mento desse vetor, que é equivalente à área do paralelogramo indicado. Retomando o exemplo anterior, temos $w = u \times v = (-2,\ 41,\ 24)$. Obtendo o módulo que equivale à área do paralelogramo formado por u e v, temos $|w| = \sqrt{(-2)^2 + 41^2 + 24^2} = \sqrt{2261} \simeq 47,54$ u.a (lê-se: unidades de área).

Outro tipo de produto, chamado de produto misto, é obtido ao aplicar o produto vetorial entre dois vetores e, posteriormente, o produto escalar com o resultado do primeiro produto com o terceiro vetor envolvido na operação. Em termos notacionais, temos $(u \times v) \bullet w = u \times v \bullet w$. A hierarquia da operação ocorre ao realizar, primeiramente, o produto vetorial para, posteriormente, aplicar o produto escalar, gerando o produto misto. Ao aplicarmos o módulo do produto misto, que, nesse caso, seria o módulo de um número escalar, obtemos o valor absoluto desse número. Vejamos um exemplo.

Considere os vetores $u = (1,0,0)$, $v = (1,2,0)$ e $w = (1,0,1)$. Ao realizar o produto misto $u \times v \bullet w$, temos:

1. $u \times v = 0\,i - 0\,j + 2\,k = (0,\ 0,\ 2)$
2. $u \times v \bullet w = (0,\ 0,\ 2) \bullet (1,0,1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

Para obtermos o volume do paralelepípedo formado pelos vetores u, v e w, aplicamos o módulo, ou seja, $|u \times v \bullet w| = |2| = 2\ u.v$ (lê-se: unidades de volume).

Quando analisamos objetos no espaço tridimensional, podemos ter análises comparativas entre pontos, retas e planos. Por exemplo, dadas duas retas ou dados dois planos, elas(es) podem ser paralelas(os), coincidentes ou, ainda, concorrentes. Além disso, pontos e retas podem pertencer a um mesmo plano, sendo considerados coplanares, ou, ainda, em planos distintos. Saiba mais explorando o material sobre Geometria Analítica e Vetores, disponível no QR Code.

Outros conceitos relevantes que podem ser associados aos vetores são as equações de retas e de planos. A equação de uma reta é aplicada em cálculos matemáticos e, também, na Engenharia, definindo, por exemplo, se os pontos estão alinhados, determinando um ponto que esteja em uma direção distinta de uma reta dada ou, ainda, aplicando em situações como a de definir se os pilares estão alinhados, se há inclinação correta de uma viga. Temos diferentes formas de apresentar a equação da reta, mas destacaremos apenas a equação vetorial da reta, expressa pela seguinte definição:

Dado que r é uma reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, um ponto determinado, e dado um vetor $v = (a, b, c)$, de modo que exista uma única reta que passe pelo ponto P na direção do vetor v. Considere um ponto qualquer, indicado por $Q(x, y, z)$, pertencente à reta r, se, e somente se, $\overline{PQ} = tv$, para algum t pertencente aos números reais.

Temos que o número real t é um parâmetro utilizado para determinar os pontos pertencentes à reta. Também, ocorre que $\overline{PQ} = Q - P$, ou seja, terminamos as componentes de um vetor realizando a operação ponto final menos ponto inicial, logo $Q - P = tv$, ou, ainda, $Q = P + tv$. Ao substituir pelas coordenadas dos pontos e componentes dos vetores, temos $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, que é denominada equação vetorial da reta.

O vetor v é denominado vetor diretor, por indicar a direção dessa reta r. Ao considerarmos o ponto $P(1,1,-2)$, que possui a direção do vetor $v = (1,3,4)$, a equação vetorial da reta é dada por $(x, y, z) = (1,1,-2) + t(1,3,4)$. Para $t = 2$, segue que $(x, y, z) = (1,1,-2) + 2 \cdot (1,3,4)$, ou seja, temos a seguinte representação geométrica:

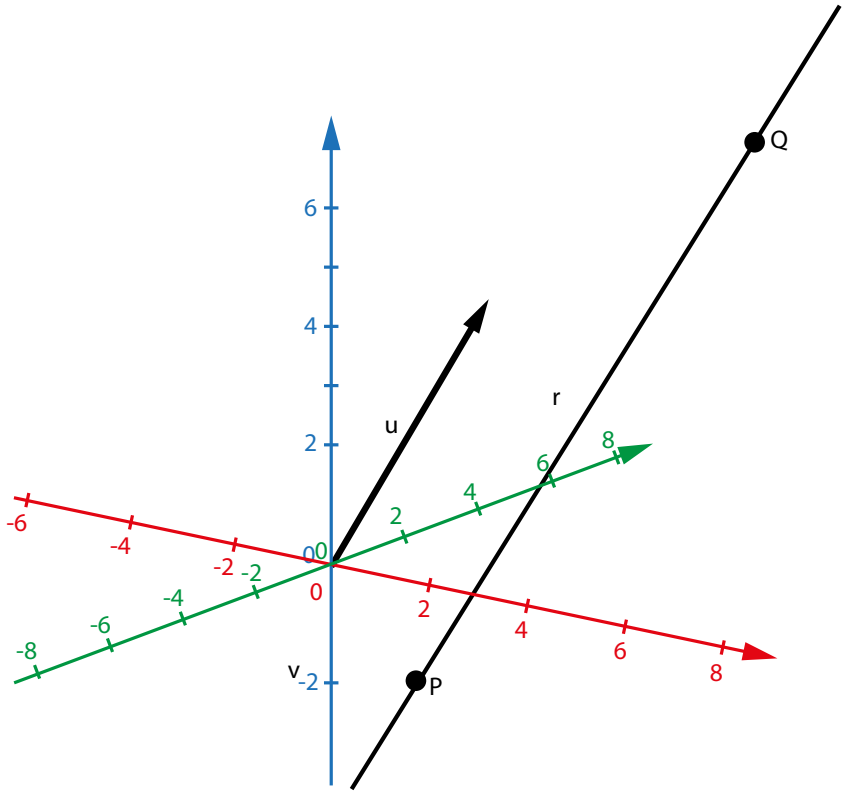


Figura 19 - Representação da equação vetorial da reta / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho no sistema de coordenadas do vetor v, partindo da origem, e a reta paralela a esse vetor, gerada pela equação vetorial da reta.

De modo similar à equação vetorial da reta, para determinar a equação vetorial do plano, precisamos de um ponto determinado e dois vetores coplanares a esse ponto, de modo que:

> α é um plano que contém o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, sendo u e v não paralelos. O ponto $Q(x, y, z)$ é pertencente ao plano se, e somente se, os vetores $\overline{PQ}$, u e v forem coplanares, assim, o plano α pode ser representado pela equação vetorial do plano $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, b_1, c_1) + h(a_2, b_2, c_2)$, sendo t e h números reais adotados como parâmetros.

Participe da discussão sobre vetores e suas aplicações e saiba como essa ferramenta pode te auxiliar a interpretar diversos cálculos aplicados. Aperte o play, e vamos juntos!

Os conteúdos abordados nesta unidade podem ser investigados em materiais complementares. Para aprofundar os seus estudos sobre a interpretação geométrica de vetores e associar às operações algébricas, recomendo que estude o livro *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, dos autores Boulos e Camargo (1987). Caso precise estudar mais sobre a parte analítica de vetores, o livro *Álgebra Linear*, de Boldrini *et al*. (1986), é indicado. Quanto às aplicações relacionadas à área da Álgebra Linear, recomendamos duas obras: a primeira é de Howard e Rorres (2001), e a segunda, dos autores Kolman e Hill (2006).

Enquanto arquiteto(a), você é responsável pela conferência de cálculos de volume e precisa validar o projeto da caixa d'água em formato de um paralelepípedo oblíquo, que será construído com placas de concreto com dimensões de 3 metros de comprimento, 2 metros de profundidade e 1 metro de altura. A inclinação da lateral da caixa d'água forma um ângulo de 45^{o} com a base. A partir disso, e desprezando o espaço ocupado pelas vigas de sustentação e adotando os vetores u, v e w como referência, ao calcularmos o módulo do produto misto de $|uxv \bullet w|$, obtemos o volume do reservatório. Desse modo, realizamos os seguintes cálculos:

1. $uxv = 0i - 0j + 6k = (0,0,6)$.
2. $|uxv \bullet w| = |(0,0,6) \bullet (1,0,1)| = |6| = 6\ u.v.$

Portanto, o volume da caixa d'água corresponde a $6\ m^3$ de capacidade.

Vimos, nesta unidade, diversos tópicos relacionados aos estudos de vetores. Agora, é a sua vez de por isso em prática! Desafio você a construir o seu próprio mapa mental. Utilize "Vetores" como palavra central e elenque cada representação e operação algébrica realizada neste estudo, estabelecendo relações com o tema central. Vejamos um exemplo:

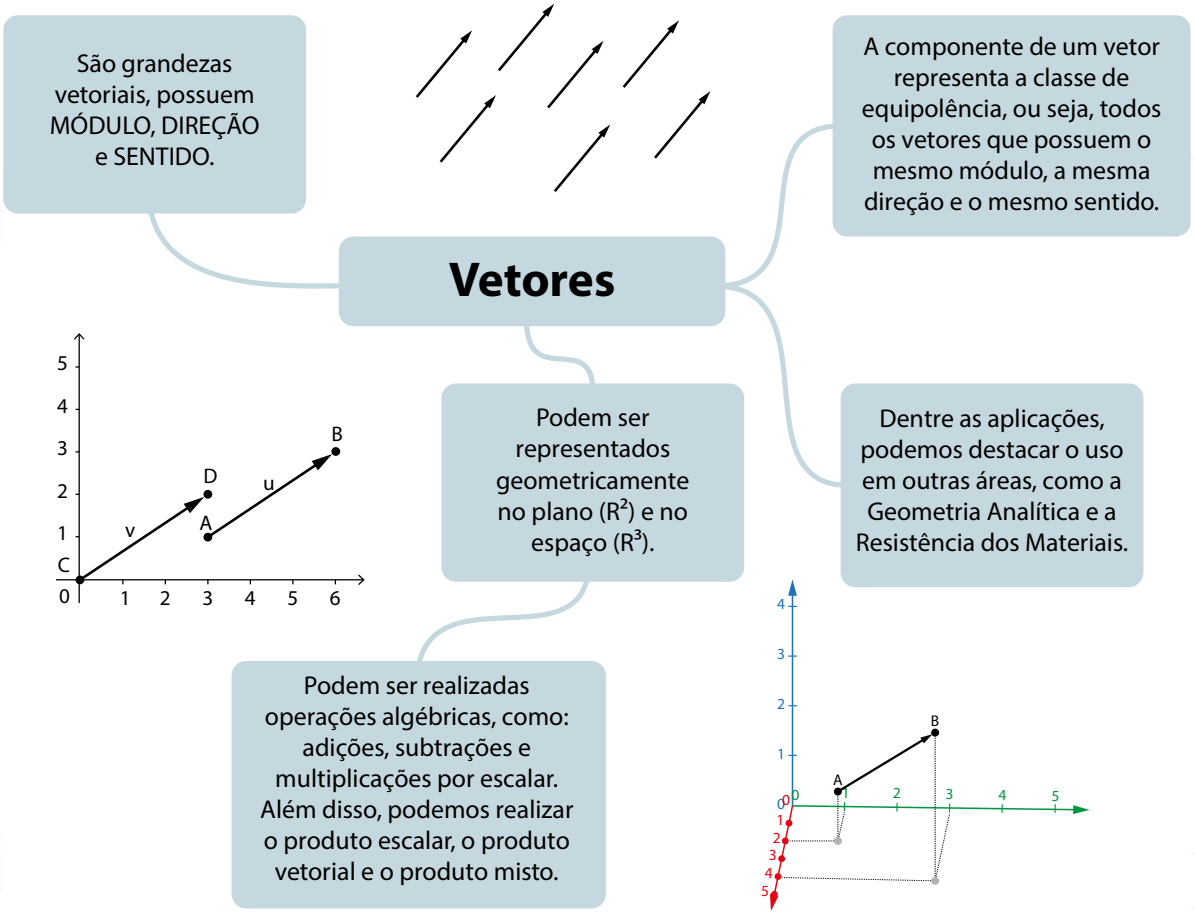


Figura 20 - Mapa mental sobre vetores / Fonte: a autora.

Para desenvolver essa atividade, recomendamos que faça um esboço inicial e finalize com a ferramenta gratuita disponibilizada em: https://www.goconqr.com/.

MAPA MENTAL

1. As grandezas vetoriais podem ser aplicadas na própria Matemática, mas, também, em outras áreas do conhecimento, como Química, Física e Engenharias. Considere os conceitos relacionados a vetores e analise as afirmações a seguir.

   I) Quando ocorre a multiplicação por escalar de um vetor, mantêm-se a mesma direção e o mesmo sentido do vetor original.

   II) Se o ângulo formado por dois vetores u e v é agudo, então $u \bullet v > 0$.

   III) Ao calcular um produto escalar, obtemos um vetor, e o resultado do produto misto é um escalar.

   Assinale a alternativa que corresponde ao julgamento das afirmações.

   a) Apenas I é correta.

   b) Apenas II é correta.

   c) Apenas II e III são corretas.

   d) Apenas I e II são corretas.

   e) Apenas I e III são corretas.

2. Os vetores podem receber tanto um tratamento geométrico quanto um tratamento algébrico, envolvendo propriedades e operações. Considere os conceitos sobre produto escalar e a base canônica. Dados $u = (4, 0, -2)$ e $v = 1i + 4j + 3k$ do espaço tridimensional, o resultado da expressão $u \bullet v$ será:

   a) -2.

   b) 2.

   c) 7.

   d) -14.

   e) 14.

AGORA É COM VOCÊ

3. Diversas operações entre vetores também possuem interpretações geométricas no plano e no espaço tridimensional. Com base nisso, analise as afirmações a seguir.

   I) O ângulo entre dois vetores pode ser obtido ao relacionar o produto vetorial e o cosseno do ângulo formado por esses vetores.

   II) O módulo do produto vetorial de dois vetores u e v é equivalente à área do paralelogramo formado pelos vetores u e v.

   III) Para calcular o volume de um paralelepípedo de arestas formadas pelos vetores u, v e w, calculamos o módulo do produto misto, dado por $|uxv \bullet w|$.

   Assinale a alternativa que corresponde às afirmações corretas:

   a) Apenas II é correta.

   b) Apenas III é correta.

   c) Apenas II e III são corretas.

   d) Apenas I e II são corretas.

   e) Apenas I e III são corretas.

AGORA É COM VOCÊ

2

Equações e funções reais

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, trataremos das equações e funções reais, estruturando os conceitos prévios, de modo a definir e conceituar esses tópicos. Discorreremos sobre os seguintes conteúdos: conjuntos e conjuntos numéricos; conceituação de função; equações e funções polinomiais. Para apresentar formalmente a definição de função, precisamos dos subsídios da Teoria de Conjuntos, dessa forma, traremos, de forma breve, as principais definições e propriedades, apontando a relação de pertinência, de inclusão, operações entre conjuntos e conjuntos numéricos. Com base nisso, podemos definir o que seria uma função de forma genérica a partir da Teoria de Conjuntos. Para ilustrar essa conceituação, faremos uma retomada de conceitos elementares sobre polinômios e resoluções de equações polinomiais, para, então, apresentarmos alguns casos de funções, apresentando as leis de formação, suas principais características e as representações gráficas pertinentes. Bons estudos!

Um dos temas de relevância na atualidade é a sustentabilidade, que objetiva suprir as necessidades humanas, mas preservando o meio ambiente. Dentro desse contexto, a utilização de sistemas residenciais com o uso de energia solar tem tido uma boa aceitação no mercado. Você, como arquiteto(a), pretende realizar a gestão de projetos direcionados à utilização de sistemas residenciais com energia solar? A primeira etapa é elaborar uma função que relacione a receita, o custo e o lucro em relação ao metro quadrado de placa instalada, como as da ilustração a seguir:

Figura 1 - Instalação de placas fotovoltaica / Fonte: Pixabay (2016, on-line).

Descrição da Imagem: foto de uma instalação de placas fotovoltaicas, as quais estão colocadas lado a lado em fileiras alternadas, cobrindo totalmente o telhado disponível.

Com base nesse contexto, quais seriam as variáveis envolvidas? Como desenvolver essa função?

A utilização de placas de energias fotovoltaicas como fonte de energia limpa e renovável tem emergido nos últimos anos. Para atender a essa demanda, existem diversos modelos de placas para atender aos diferentes usos, entretanto, recomenda-se o uso de placas que possuem a certificação do Inmetro e da IEC 61215, que consiste em um teste de certificação de resistência contra granizos. A grande maioria das placas fotovoltaicas são de silício, com células monocristalinas ou policristalinas. De modo geral, é recomendado que possuam a eficiência de produção de energia acima de 15%. Comumente, o tempo de garantia de instalação de placas solares é de 25 anos. Vejamos, no Quadro 1 a seguir, um exemplo de especificação técnica de uma placa solar:

Placa Solar Canadian Solar - Modelo CS6P 245P - 245 Watts
Tecnologia: Policristalino - 60 células
Potência: 245 Watts
Eficiência: 15,23%
Largura x Altura - Peso: 1.63m x 0,98m - 19kg
Certificações: Inmetro e IEC 61215

Quadro 1 - Especificações de placa solar / Fonte: adaptado de Canadian Solar ([2021], on-line)[1].

Considere que a instalação de placas solares depende de materiais específicos, do custo da mão de obra técnica especializada, de engenheiro(a) eletricista responsável pelo projeto junto à concessionária de energia, do deslocamento até o local da obra e, além disso, do trabalho do(a) arquiteto(a) responsável pela gestão da obra nesse processo. Como podemos estimar uma receita por meio da média de preço por metro quadrado da placa solar instalada ao utilizar funções matemáticas simples?

Ao considerar as relações entre grandezas, podemos conceituar as funções e aprender como utilizá-las na prática. Por exemplo, se você possui uma obra e precisa estimar o preço dos serviços da instalação de placas solares, podemos adotar como referência uma média por metro construído no valor de R$ 350,00. Desse modo, temos:

Quantidade de metros	1	2	3	4	5
Valor de custo por m²	R$ 350,00	R$ 700,00	R$ 1050,00	R$ 1400,00	R$ 1750,00

Quadro 2 - Relação entre quantidade de metros instalados de placas solares e o valor de custo / Fonte: a autora.

Observe que são relacionadas duas grandezas: a quantidade de metros em que serão instaladas as placas solares e o valor de custo por metro quadrado. Sempre é preciso definir a primeira grandeza

para obtermos a segunda. Essa relação é um exemplo do que é denominado função. Nesse caso, temos que a quantidade de metros é a variável independente (x), e o valor de custo $(y = f(x))$ é a variável dependente. Assim, é possível generalizar da seguinte forma:

$$f(x) = 350x$$

Utilizando essa fórmula, podemos calcular o custo para qualquer metragem, ou seja, se tivermos, em uma residência, placas solares instaladas em 50 metros quadrados, calculamos:

$$f(50) = 350 \cdot 50 = 17500$$

Ou seja, o valor de custo da mão de obra será de R$ 17.500,00.

Utilize esse exemplo, construa outras relações envolvidas no processo de instalação das placas e monte suas funções. Anote todas as suas reflexões em seu Diário de Bordo.

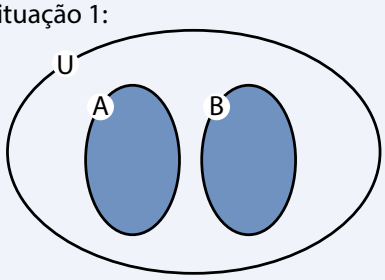
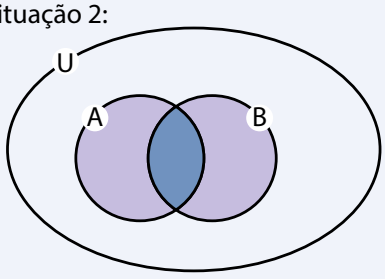
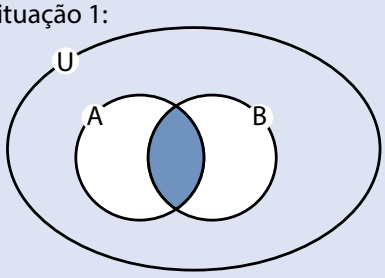
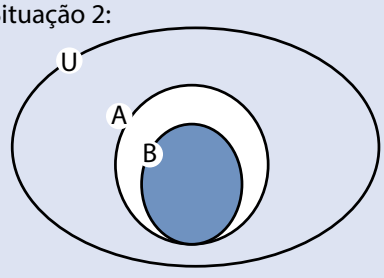
DIÁRIO DE BORDO

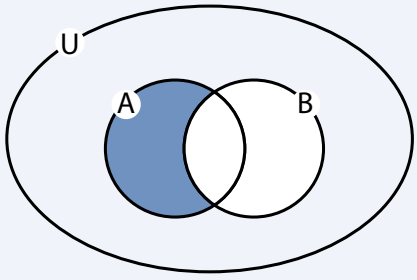
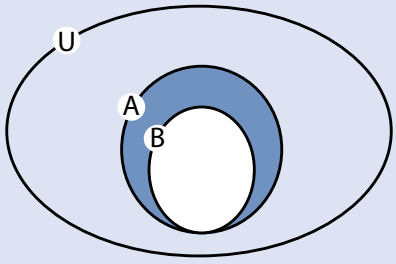
Para abordarmos as equações e funções, precisamos retomar alguns conceitos elementares sobre conjuntos. Ao relacionar uma coleção de objetos que possuem características em comum, ou seja, estão bem definidos, temos o que denominamos elementos de um conjunto. Os conjuntos podem ser do tipo finito, quando podemos elencar os seus elementos e indicar o número de elementos de um conjunto por $n(A)$ (lê-se: o número de elementos do conjunto A), ou infinitos, em que não temos como definir a quantidade de elementos. Podem representar uma coleção de, por exemplo, países, cores, números, dentre outros. Na sequência, apresentamos algumas relações relevantes para nossos estudos.

Relações	Representação
Relação de pertinência: ocorre entre elementos e conjuntos.	$x \in A$ (lê-se: o elemento x pertence ao conjunto A).
Negação da relação de pertinência: ocorre entre elementos e conjuntos.	$x \notin A$ (lê-se: o elemento x não pertence ao conjunto A).
Relação de inclusão: ocorre ao relacionarmos conjuntos com outros conjuntos. Podemos ter a relação de subconjuntos, em que todos os elementos de um conjunto pertencem ao outro.	$A \subset B$ (lê-se: o conjunto A está contido no conjunto B). $B \supset A$ (lê-se: o conjunto B contém o conjunto A).
Relação de igualdade: ocorre se todos os elementos de um conjunto A forem elementos de um conjunto B.	$A = B$ (lê-se: o conjunto A é igual ao conjunto B).
Relação de diferença: ocorre se houver algum elemento distinto entre dois conjuntos.	$A \neq B$ (lê-se: o conjunto A é diferente do conjunto B).

Quadro 3 - Representação de relações entre dois conjuntos Fonte: a autora.

Em geral, assumimos um conjunto que denominamos universo (U) e que contém outros conjuntos. Quando ocorre de um conjunto não possuir elementos, ele é chamado de conjunto vazio e indicado por $A = \varnothing$ ou $A = \{\}$. Um caso particular de conjunto se dá quando ele possui apenas um único elemento, nessa situação, é chamado de conjunto unitário; por exemplo, o conjunto que tem como único elemento o número dois é representado por $A = \{2\}$. Além disso, ocorrem operações entre os conjuntos, descritas no quadro a seguir.

Diagramas	Representação
Situação 1:  Situação 2:  	União de conjuntos: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (lê-se: x, tal que x pertence ao conjunto A ou x pertence ao conjunto B).
Situação 1:  Situação 2:  	Interseção de conjuntos: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ (lê-se: x, tal que x pertence ao conjunto A e x pertence ao conjunto B). Caso os conjuntos sejam disjuntos, temos que $A \cap B = \varnothing$.

	Diferença de conjuntos: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (lê-se: x, tal que x pertence ao conjunto A e x não pertence ao conjunto B).
	Complementar: Se $B \subset A$, temos $C_A^B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (lê-se: x, tal que x pertence ao conjunto A e x não pertence ao conjunto B).

Quadro 4 - Representação das operações entre dois conjuntos / Fonte: a autora.

Quanto aos conjuntos numéricos, podemos representá-los da seguinte forma:

- Números naturais: $N = \{0,1,2,3,...,n,...\}$.
- Números inteiros: $Z = \{...,-n,...,-2,-1,0,1,2,...,n,...\}$.
- Números racionais: $Q = \{x \mid x = \frac{a}{b},\ a,\ b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$.
- Números irracionais: $I = \{x \mid x \neq \frac{a}{b},\ a,\ b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$.
- Números reais: $R = Q \cup I$.

Representando na forma de diagrama, temos:

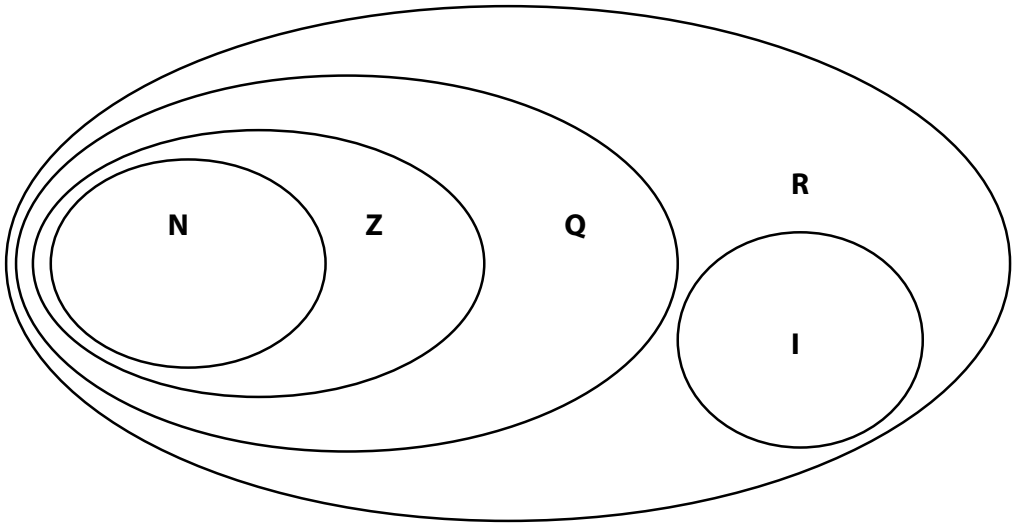


Figura 2 - Diagrama de Venn-Euler dos conjuntos numéricos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho em forma de diagrama, em que o conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros; os números inteiros são subconjuntos dos números racionais; os números racionais são disjuntos dos números irracionais; e o conjunto dos números reais é a união dos conjuntos dos números racionais e números irracionais.

Vimos que podemos relacionar duas grandezas diferentes, estabelecendo uma regra que associa ambas. Diante desse contexto, o que seria uma função?

Com base na Teoria de Conjuntos, podemos definir uma função da seguinte forma:

Dados A e B, dois conjuntos não vazios. Uma função f é uma relação de A para B, tal que, para todo elemento de A, associa-se um único elemento de B. Indicada por: $f : A \to B$ (lê-se: função f de A em B).

Podemos adotar outras letras para associar a uma função, como, por exemplo, $g(x)$ ou $h(x)$, e, também, podemos utilizar outras letras para representar a variável independente, como $f(t)$ ou $f(a)$. Uma função pode ser representada por meio de um plano cartesiano. Observe a representação a seguir:

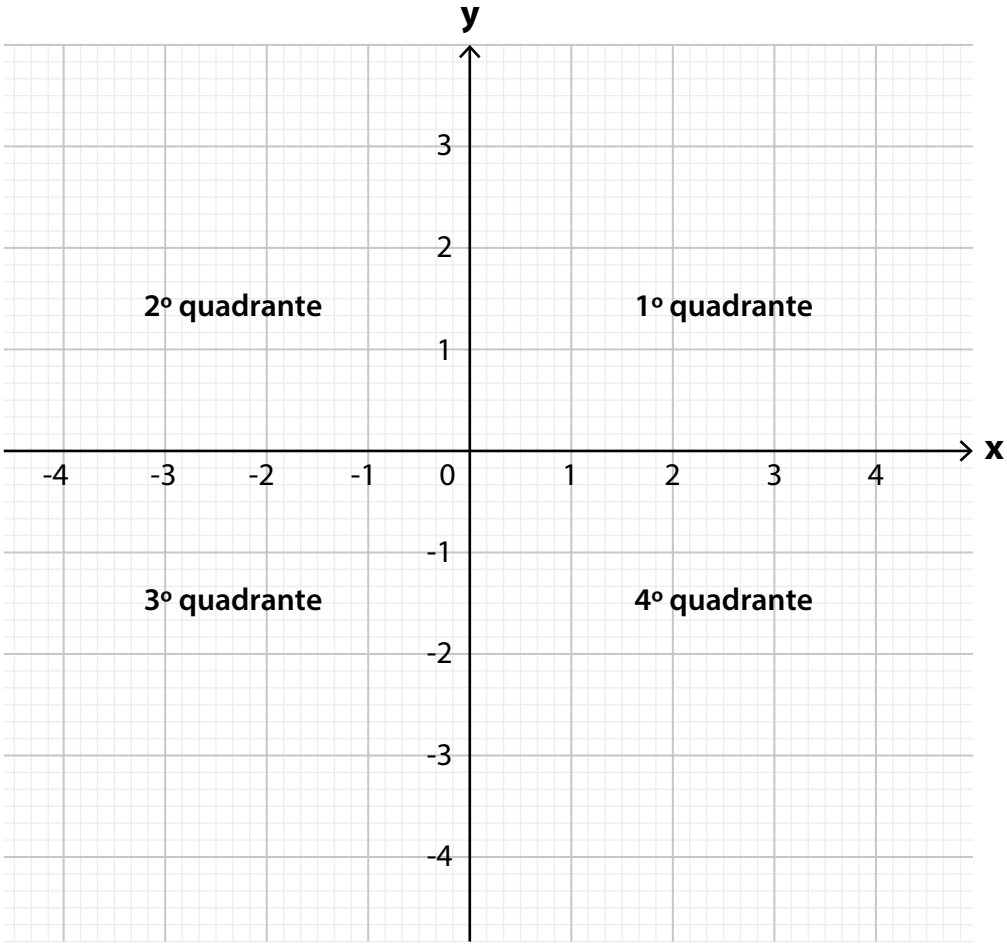


Figura 3 - Representação do plano cartesiano / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho de um plano cartesiano, com eixo horizontal indicado pela variável x, e o eixo vertical indicado pela variável y. Há a marcação dos quadrantes no sentido anti-horário.

Na representação gráfica, os eixos x e y são perpendiculares entre si. Chamamos o eixo horizontal x de eixo das abscissas, e o eixo vertical y, de eixo das ordenadas. No cruzamento desses eixos, temos o ponto O, chamado de origem do plano cartesiano. Esses eixos subdividem esse plano em quatro regiões, chamadas quadrantes, indicados no sentido anti-horário, iniciando no quadrante em que x e y são positivos. A localização de pontos nesse sistema ocorre com a utilização de um par ordenado de números reais (a,b), denominado coordenadas do ponto.

Em uma representação gráfica, a função $f(x)=3x+2$ seria expressa da seguinte forma:

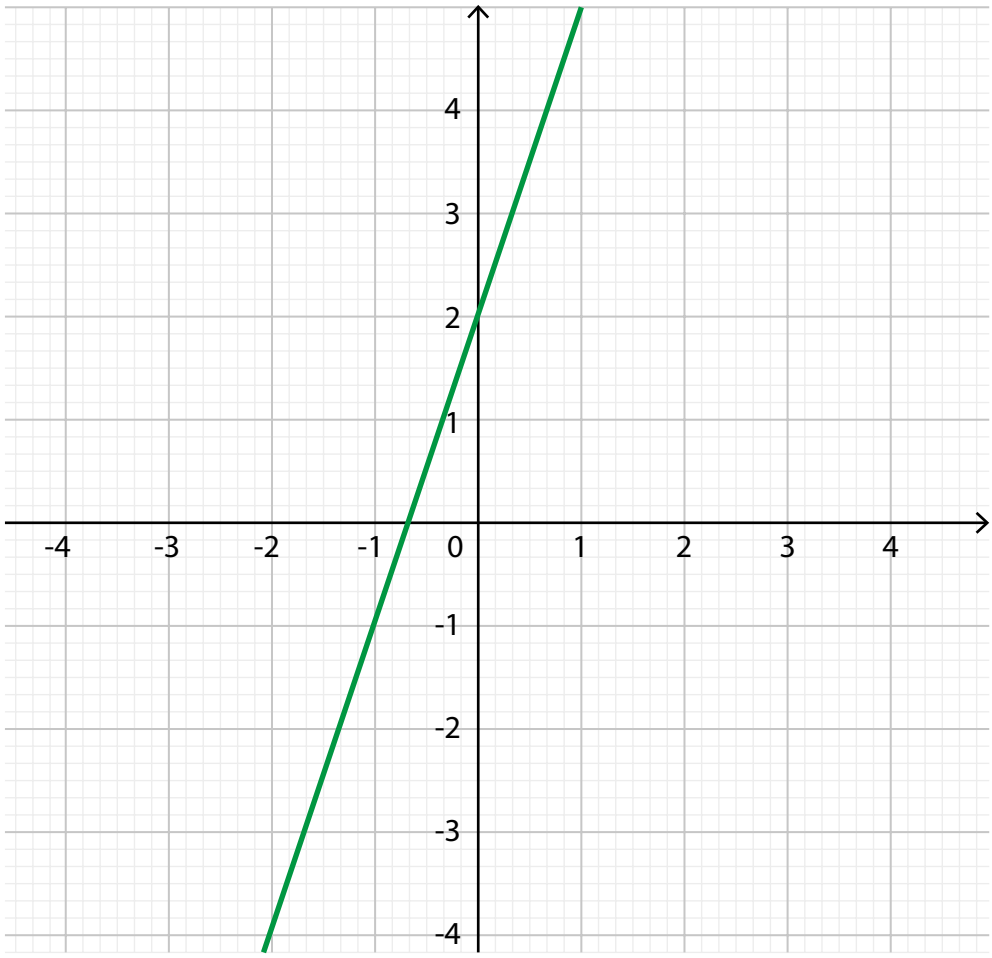


Figura 4 - Representação do plano cartesiano da função $f(x) = 3x + 2$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = 3x + 2$, que representa uma reta na posição inclinada, que é crescente da direção do terceiro para o primeiro quadrante.

Outra consideração que fazemos em relação às funções são o domínio, o contradomínio e a imagem. Para ilustrar cada um desses termos, consideraremos um conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e um conjunto $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ao definirmos a função $f : A \to B$, tal que $f(x) = 2x$ para todo $x \in A$. Podemos, então, representar o seguinte diagrama:

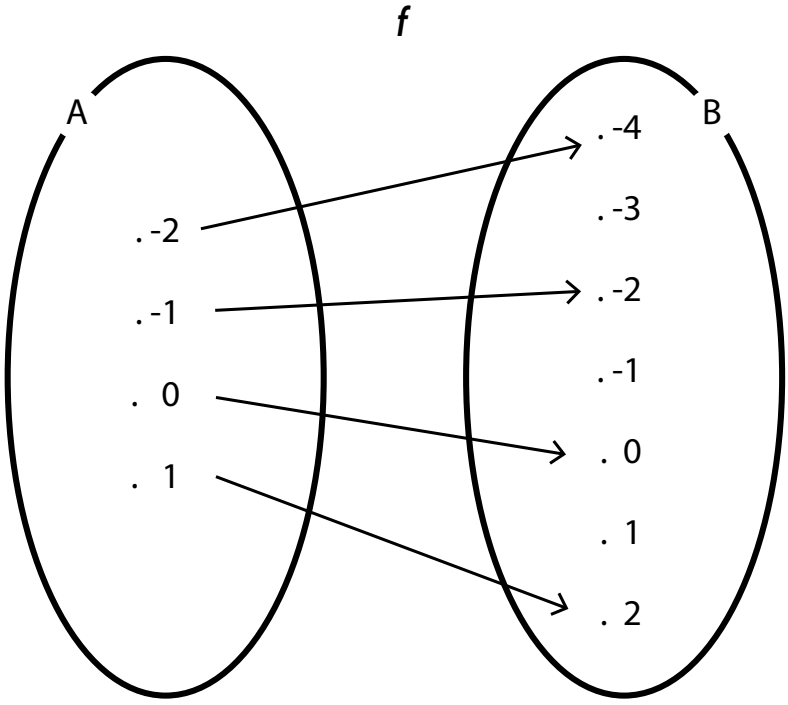


Figura 5 - Diagrama da função dada por $f(x) = 2x$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: diagrama de setas, sendo que o conjunto A está disposto em uma elipse, em que estão indicados os seus elementos, que partem do conjunto A para o conjunto B, que também está disposto na forma de uma elipse, com a indicação de seus elementos relacionados de acordo com a lei de formação $f(x) = 2x$.

Nesse exemplo, temos que o conjunto A representa o domínio da função, indicado por $D(f)$ (lê-se: domínio da função f), e o conjunto B representa o contradomínio da função, ou seja, $CD(f)$ (lê-se: contradomínio da função f). O conjunto imagem, denotado por $\text{Im}(f)$ (lê-se: imagem da função f), seria os resultados da fórmula aplicada, ou seja, $\text{Im}(f) = \{-4, -2, 0, 2\}$.

De forma geral, em uma função $f : A \to B$, chamamos o conjunto A de domínio, e o conjunto B, de contradomínio. Cada elemento y do conjunto B está relacionado ao elemento x do conjunto A, tal que $y = f(x)$, o que chamamos de imagem de x pela função f.

As funções são determinadas por fórmulas, também chamadas de lei de formação. De acordo com as características de cada fórmula, são classificadas e analisadas as suas características. Algumas dessas análises dependem das resoluções de equações. Em algumas análises, é necessário interpretar algumas relações, vejamos o exemplo.

Quando se estuda a resistência dos materiais, existe uma relação entre tensão e deformação para determinados intervalos, que pode ser considerada linear, denominada Lei de Hooke, em que se relaciona σ : tensão com ε : deformação, e ela possui a seguinte representação gráfica:

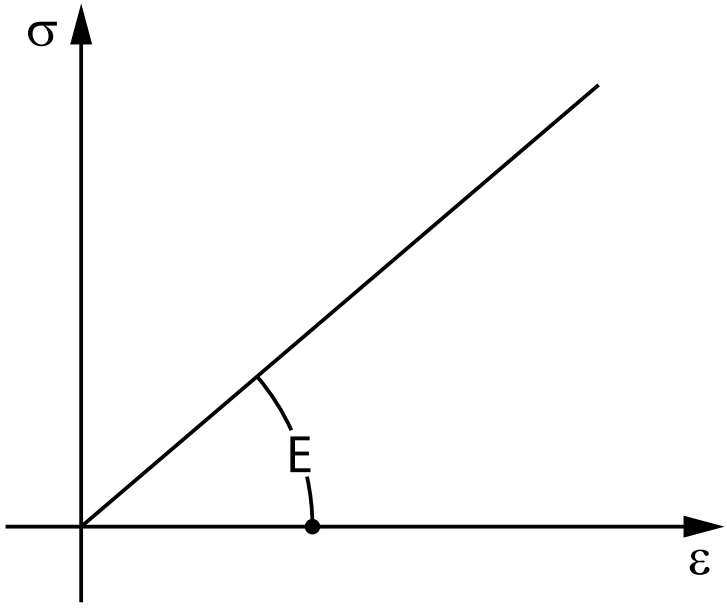


Figura 6 - Módulo de elasticidade ou de deformação longitudinal / Fonte: Pinheiro, Muzardo e Santos (2004, p. 6).

Descrição da Imagem: representação gráfica de uma função indicada no primeiro quadrante, sendo linear, ou seja, passa pela origem.

Para abordarmos as funções polinomiais, que são leis de formações geradas por polinômios, explanaremos sobre os principais conceitos desse tópico. Um polinômio com coeficientes reais na variável x pode ser expresso como uma função dada por $p : R \to R$, tal que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, em que $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_n\ \in R$.

Para um polinômio não nulo, podemos indicar o grau de acordo com o expoente de $p(x)$ do termo dominante. No caso de um polinômio nulo, não tem grau por não possuir termo dominante. Ao ocorrer que o coeficiente do termo dominante de um polinômio seja igual a 1, chamamos de polinômio mônico, ou seja, formado por apenas um termo. Além disso, podemos ordenar com base em suas potências, em ordem crescente ou decrescente. Outra consideração é que um polinômio pode ser completo quando todos os coeficientes são não nulos e, caso exista algum coeficiente nulo, será denominado incompleto.

Vimos os conceitos sobre polinômios que são base para diversos outros conteúdos. Em algumas situações, é necessário fazer comparações entre polinômios. Quando se utiliza a igualdade, temos o que denominamos equação. A partir disso, como seria a solução de equações polinomiais?

Quando realizamos a comparação entre dois polinômios, temos as equações de modo que indicamos os termos da igualdade como primeiro e segundo membros. Na sequência, exemplificaremos os principais tipos de equações polinomiais.

a) **Equações do primeiro grau**: podem ser expressas por $ax+b=0$, com $a \neq 0$, cuja raiz ou solução da equação é obtida por $x=\frac{b}{a}$. Para a resolução da equação, são aplicadas manipulações algébricas baseadas em propriedades para manter a equivalência na igualdade. Vejamos um exemplo de resolução:

Equação	Descrição da resolução
$-3x+9=18$	Aplica o elemento oposto de $+9$.
$-3x=18-9$	Realiza o agrupamento dos termos semelhantes.
$-3x=9$	Multiplica ambos os membros por -1.
$3x=-9$	Aplica o inverso multiplicativo de 3.
$x=-\frac{9}{3}$	Simplifica a fração.
$x=-3$	Conjunto solução.

Quadro 5 - Exemplificação das propriedades aplicadas na resolução de equações do primeiro grau / Fonte: a autora.

Outro exemplo relevante na resolução de equações do primeiro grau é quando há necessidade de aplicar a propriedade distributiva. Vejamos o caso a seguir:

Equação	Descrição da resolução
$2\cdot(x+5)=3x-2$	Aplica a propriedade distributiva.
$2x+10=3x-2$	Aplica o elemento oposto de $2x$ e -2, separando, no primeiro membro, os termos independentes e no segundo membro as incógnitas.
$10+2=3x-2x$	Realiza o agrupamento dos termos semelhantes.
$12=x$	Conjunto solução.

Quadro 6 - Exemplificação das propriedades aplicadas na resolução de equações do primeiro grau / Fonte: a autora.

Podemos aplicar as propriedades e fazermos diferentes manipulações algébricas na resolução de equações, entretanto, o conjunto solução precisa ser mantido.

b) **Equações do segundo grau**: podem ser expressas por $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$, cuja raiz ou solução da equação é obtida por $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta=b^2-4ac$, também denominado discriminante. Para a resolução da equação, são aplicadas manipulações algébricas, baseadas em propriedades que mantêm a equivalência na igualdade, para deixar a estrutura dessa forma. Na sequência, aplica-se a fórmula de resolução, vejamos o exemplo:

Equação	Descrição da resolução
$x^2+3x-40=0$	Definem-se os coeficientes $a=1$, $b=3$ e $c=-40$.
$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-40)$ $\Delta=9+160$ $\Delta=169$	Substituem-se os coeficientes no discriminante, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem das operações: 1) Potenciação. 2) Multiplicação; 3) Adição e subtração.
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{169}}{2.1}$ $x_1=\dfrac{-3+13}{2}=\dfrac{10}{2}=5$ $x_2=\dfrac{-3-13}{2}=-\dfrac{16}{2}=-8$	Substituem-se os coeficientes e o resultado do discriminante na segunda parte da fórmula de resolução, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem: 1) Radiciação. 2) Cálculo das raízes. 3) Simplificação das frações. 4) Definição do conjunto solução.

Quadro 7 - Exemplificação da fórmula de resolução de equações do segundo grau / Fonte: a autora.

Há casos em que é preciso realizar as manipulações algébricas para obter a estrutura de equação do segundo grau. Podemos ter duas situações: equações incompletas — em que outras técnicas de resolução de equação possibilitam determinar a solução da equação — ou, ainda, equações completas — que, em geral, podem ser resolvidas aplicando as fórmulas de resolução. Quando ocorre de o discriminante ser negativo, a equação não possui solução real, nesse caso, as raízes pertencem a um conjunto numérico denominado de números complexos (C), que é mais amplo que os números reais, ou seja, $R \subset C$. Vejamos outros exemplos de equação do segundo grau:

Equação incompleta com coeficiente $c = 0$	Descrição da resolução
$x^2 - 12x = 0$	Fatora-se a incógnita.
$x(x - 12) = 0$	Para que um produto seja igual a zero, temos, pelo menos, um dos fatores igual a zero.
$x = 0$ ou $x - 12 = 0 \rightarrow x = 12$	Conjunto solução.
Equação incompleta com coeficiente $b = 0$	**Descrição da resolução**
$x^2 - 81 = 0$	Aplica-se o elemento oposto de -81.
$x^2 = 81$	Aplica-se a operação de radiciação em ambos os lados da igualdade.
$x = \pm\sqrt{81}$ $x_1 = 9$ $x_2 = -9$	Conjunto solução.
Equação com redução dos termos semelhantes	**Descrição da resolução**
$3x^2 + x = -x - 1 - 2x$	Agrupam-se os termos semelhantes.
$3x^2 + x = -3x - 1$	Aplica-se o elemento oposto de $-3x$ e -1.
$3x^2 + x + 3x + 1 = 0$	Agrupam-se os termos semelhantes.
$3x^2 + 4x + 1 = 0$	Definem-se os coeficientes $a = 3$, $b = 4$ e $c = 1$.
$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$ $\Delta = 25 - 16$ $\Delta = 9$	Substituem-se os coeficientes no discriminante, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem das operações: 1) Potenciação. 2) Multiplicação. 3) Adição e subtração.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{9}}{2.3}$ $x_1 = \frac{-4+3}{6} = -\frac{1}{6}$ $x_2 = \frac{-4-3}{6} = -\frac{7}{6}$	Substituem-se os coeficientes e o resultado do discriminante na segunda parte da fórmula de resolução, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem: 1) Radiciação. 2) Cálculo das raízes. 3) Definição do conjunto solução.

Quadro 8 - Exemplificação de manipulações algébricas para a resolução de equações do segundo grau / Fonte: a autora.

Além das equações polinomiais, temos outros tipos, como exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, cada uma com suas especificidades. Cada tipo de equação possui um método específico de resolução. Podemos, também, relacionar as equações com outros conteúdos, resolver sistemas de equações e lidar com desigualdades que nomeamos inequações. Para aprofundar seus estudos sobre esse tópico, recomendo o estudo do material complementar disponível no QR Code.

Com base nos conceitos expostos sobre polinômios e equações polinomiais, podemos abordar as funções polinomiais. Sempre que a lei da formação for dada por um polinômio, atribui-se essa nomenclatura. Destacamos três tipos dessas funções mais relevantes para o nosso estudo: as funções constantes, as funções afim e as funções quadráticas. Observamos que há outros tipos de leis de formações envolvendo, por exemplo, funções exponenciais, funções logarítmicas e funções trigonométricas ou, ainda, a combinação de mais de um tipo de função, formando uma composição, de modo que cada lei de formação possuirá características próprias.

Iniciamos pelo estudo das funções constantes, que são aquelas dadas por $f : R \to R$ e $f(x) = a$ para $a \in R$. Por exemplo, $f(x) = 2$ e $g(x) = -3$. Em ambos os casos, os gráficos são formados por retas paralelas aos eixos das abscissas, vejamos:

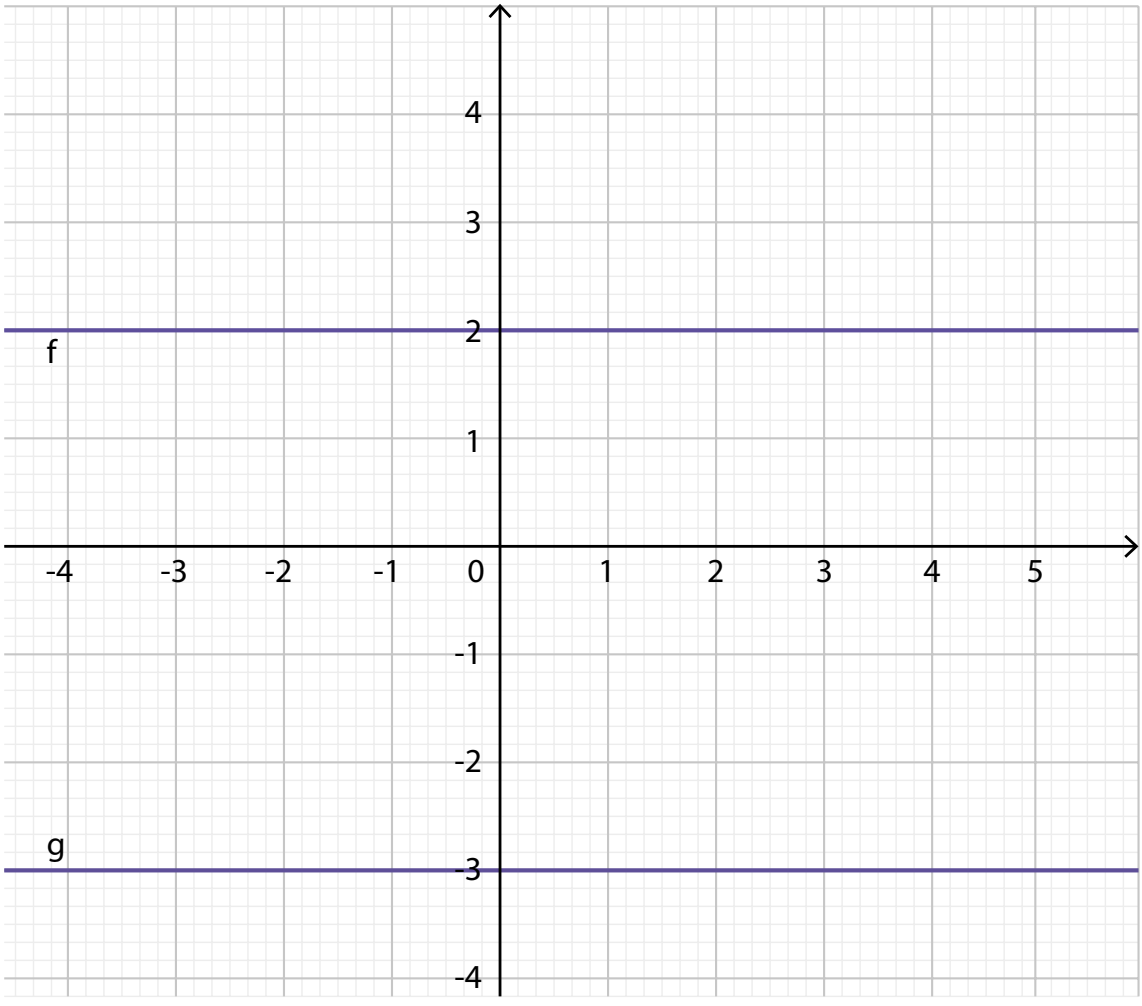


Figura 7 - Representação gráfica da função constante / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, das funções constantes representadas por retas paralelas ao eixo horizontal, em que $f(x)=2$ e corta o eixo vertical no ponto $(0,2)$, e $g(x)=-3$ corta o eixo vertical no ponto $(0,-3)$.

As funções afim, cuja lei de formação é dada por $f:R\to R$, tal que $f(x)=ax+b$, com $a\neq 0$. Nesse tipo de função, temos uma representação gráfica de uma reta, e o coeficiente a é denominado coeficiente angular, que determina a inclinação da reta, e o coeficiente b é chamado de coeficiente linear e incide no deslocamento vertical da reta formada pelo gráfico da função. Se tivermos $a>0$, a representação é de uma função crescente; caso $a<0$, temos uma função decrescente.

Uma função é classificada como crescente quando, ao aumentarmos o valor de x, indicado no eixo horizontal do plano cartesiano, também, aumentamos o valor de y, indicado no eixo vertical. Caso o valor de x aumente e o valor de y diminua, temos um caso de função decrescente.

Vejamos alguns exemplos:

a) Para $f(x) = 3x - 1$, temos a representação gráfica:

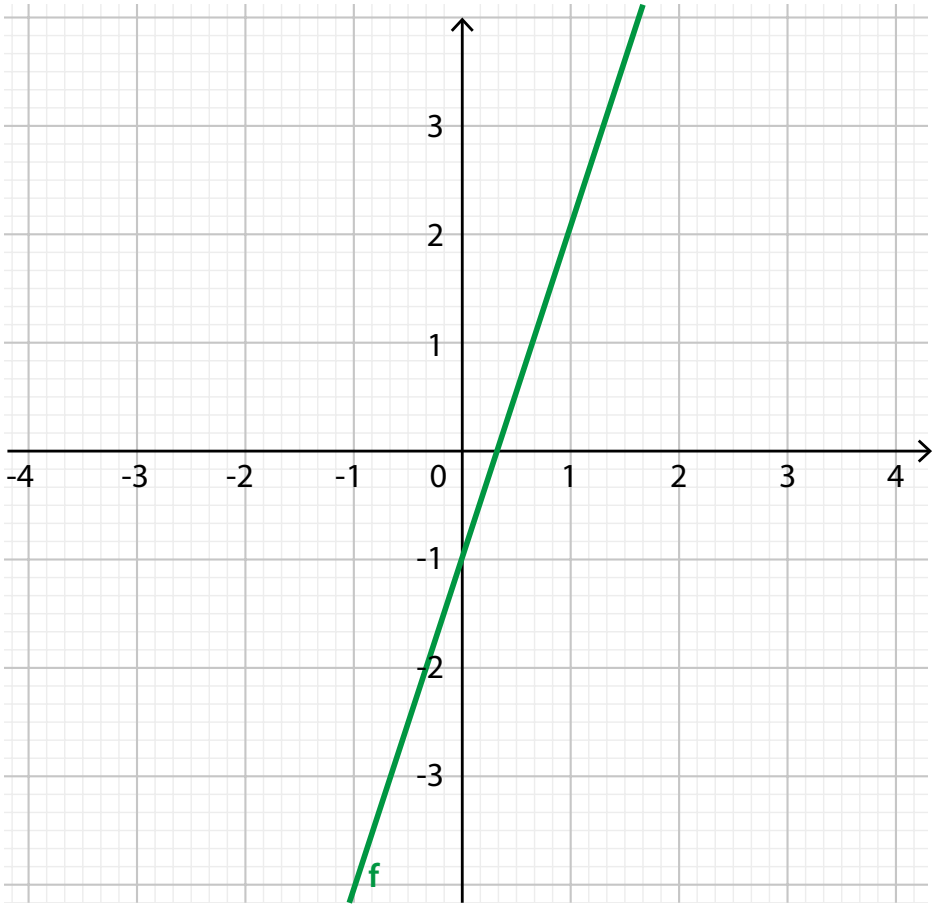


Figura 8 - Representação gráfica da função afim crescente / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = 3x - 1$, que representa uma reta na posição inclinada, cuja posição classificamos como crescente.

Note que, como $a = 3$, temos uma função crescente, e, para $b = -1$, temos que a reta corta, no eixo vertical, o ponto $(0,1)$.

b) Para $f(x) = -3x + 1$, temos a representação gráfica:

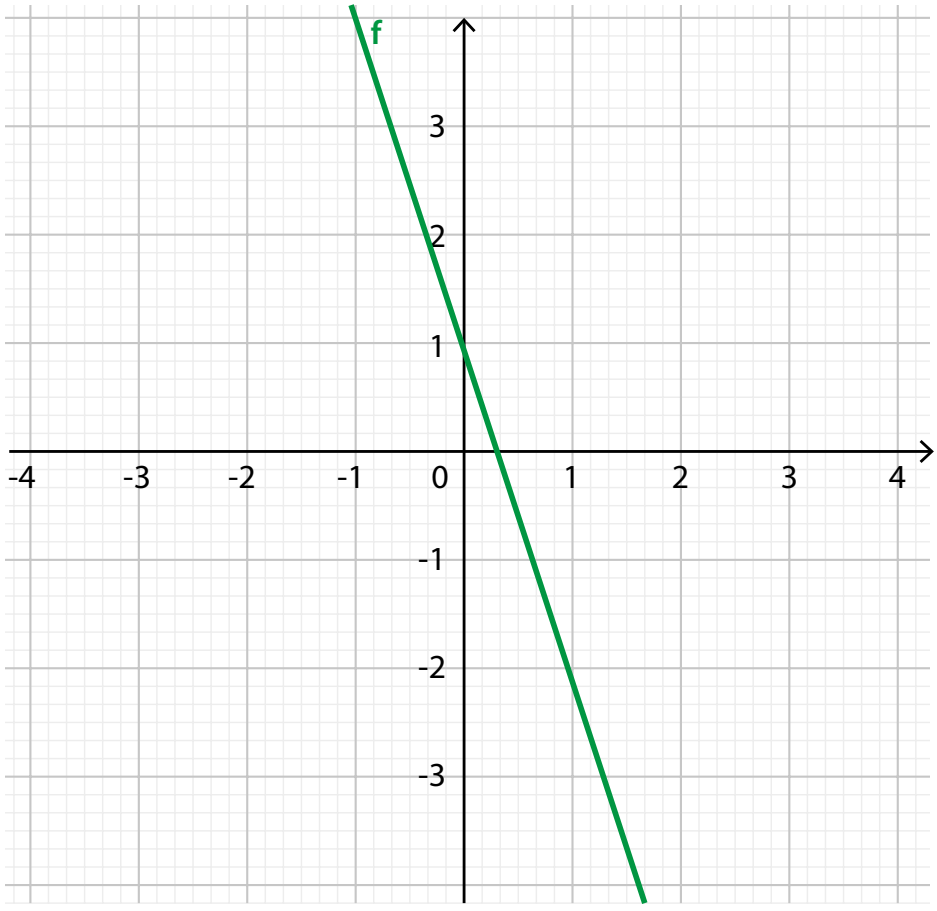


Figura 9 - Representação gráfica da função afim decrescente / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = -3x + 1$, que representa uma reta na posição inclinada, cuja posição classificamos como decrescente.

Observe que, como $a = -3$, temos uma função decrescente, e, para $b = 1$, temos que a reta corta, no eixo vertical, o ponto $(0,1)$.

c) Para $f(x) = 3x$, temos a representação gráfica:

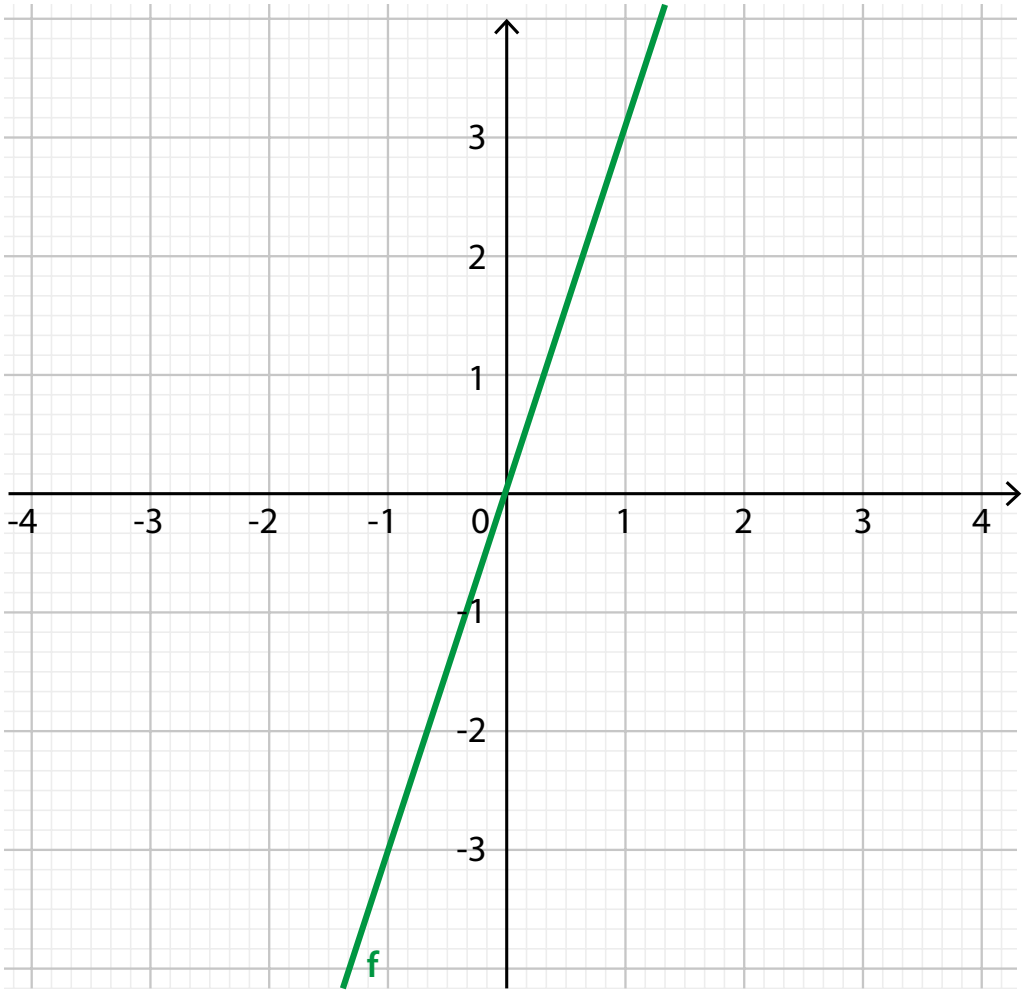


Figura 10 - Representação gráfica da função linear / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = 3x$, que representa uma reta na posição inclinada e crescente. Por cortar a origem, é chamada de função linear.

Esse é um caso particular de função afim, denominada função linear, que ocorre quando o coeficiente $b = 0$, podendo ser crescente ou decrescente. No exemplo, temos um caso de função crescente, que tem como característica a reta passar pela origem do plano cartesiano.

Outra função polinomial relevante é a função quadrática dada por $f : R \to R$, tal que $f(x) = a^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, sendo os coeficientes $a,\ b,\ c \in R$. O gráfico desse tipo de função constitui uma parábola cuja concavidade depende do valor do coeficiente a. Se o valor de $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; caso $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo. Vejamos alguns exemplos.

a) Para $f(x) = x^2 - 1$, temos a representação gráfica:

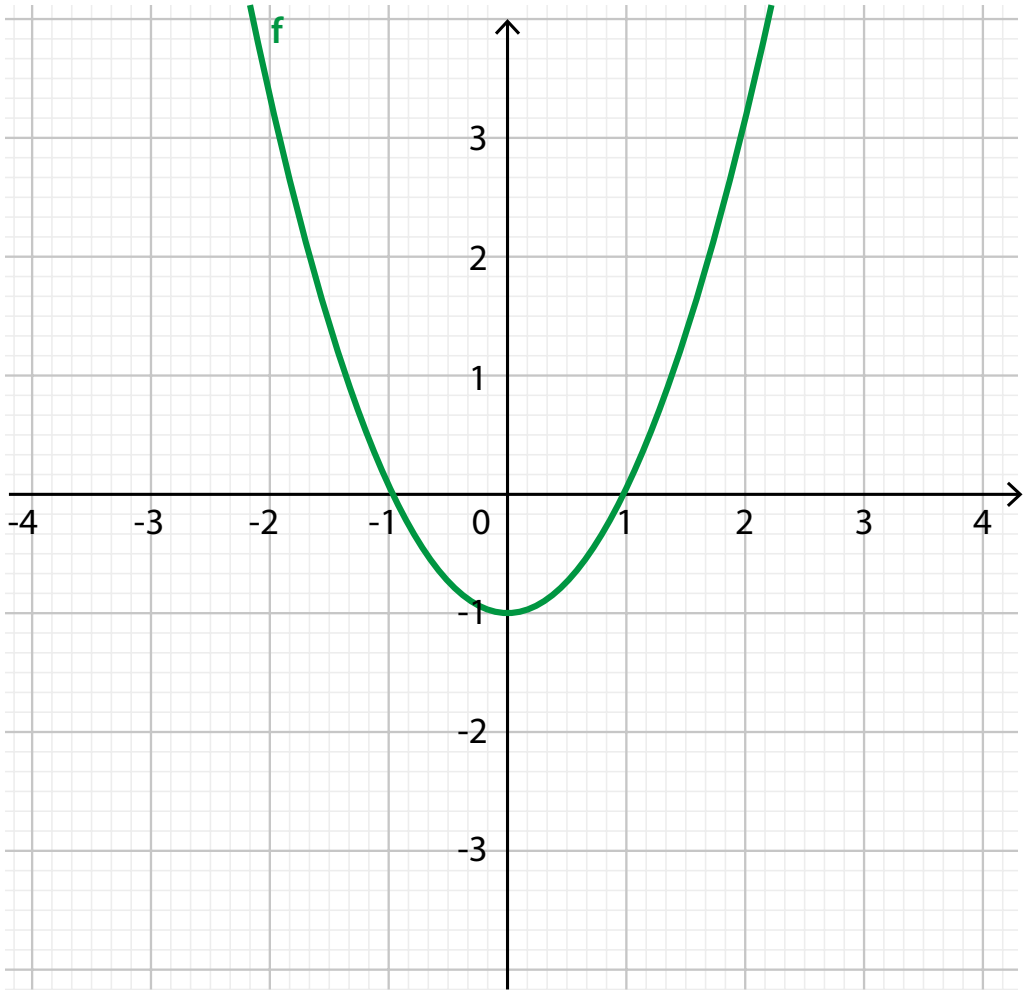


Figura 11 - Representação gráfica da função quadrática com concavidade voltada para cima / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2 - 1$, que representa uma parábola com a concavidade para cima.

Nesse exemplo, temos $a = 1$, um valor positivo, assim, temos a concavidade da parábola voltada para cima.

b) Para $f(x) = -x^2 - 1$, temos a representação gráfica:

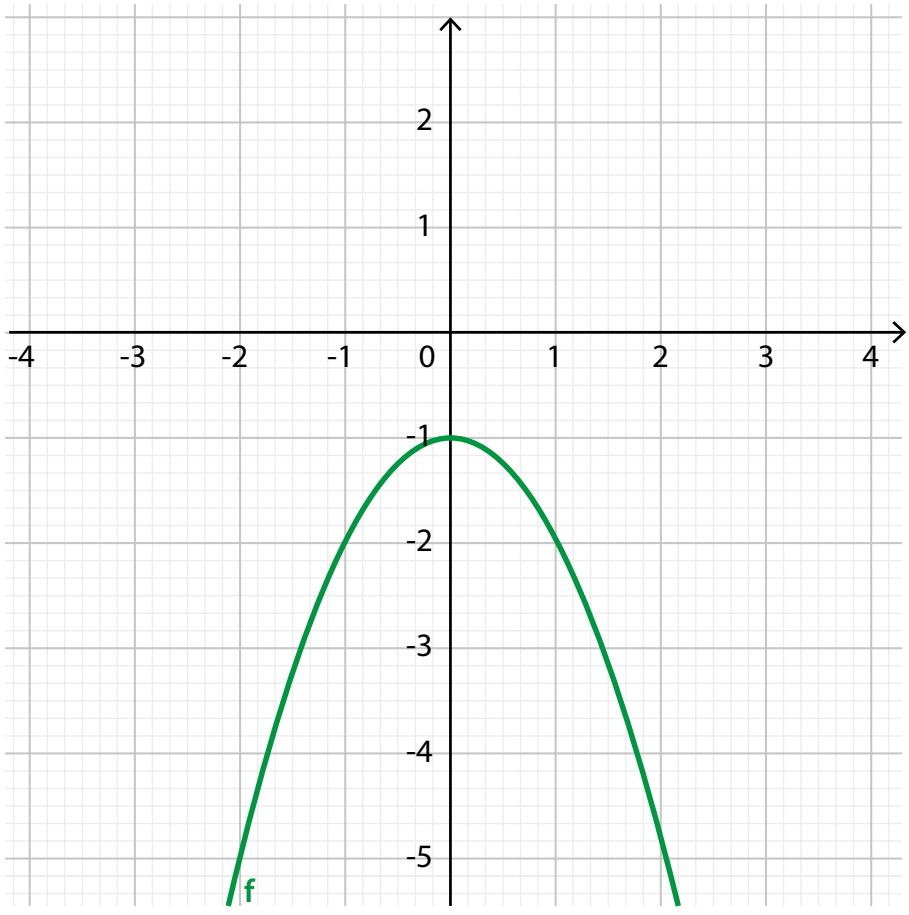


Figura 12 - Representação gráfica da função quadrática com concavidade voltada para baixo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = -x^2 - 1$, que representa uma parábola com a concavidade para baixo.

Nesse outro caso, temos $a = -1$, um valor negativo, assim, temos a concavidade da parábola voltada para baixo.

Observe que, em ambos os exemplos de parábolas, é possível traçar um eixo de simetria em relação ao vértice, isto é, o ponto em que a função muda de direção. Até determinado ponto, é crescente; após o vértice, decrescente; ou vice-versa.

O coeficiente a também interfere na abertura da parábola. Observe a representação gráfica de $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x^2 - 1$ e $h(x) = \frac{x^2}{2} - 1$.

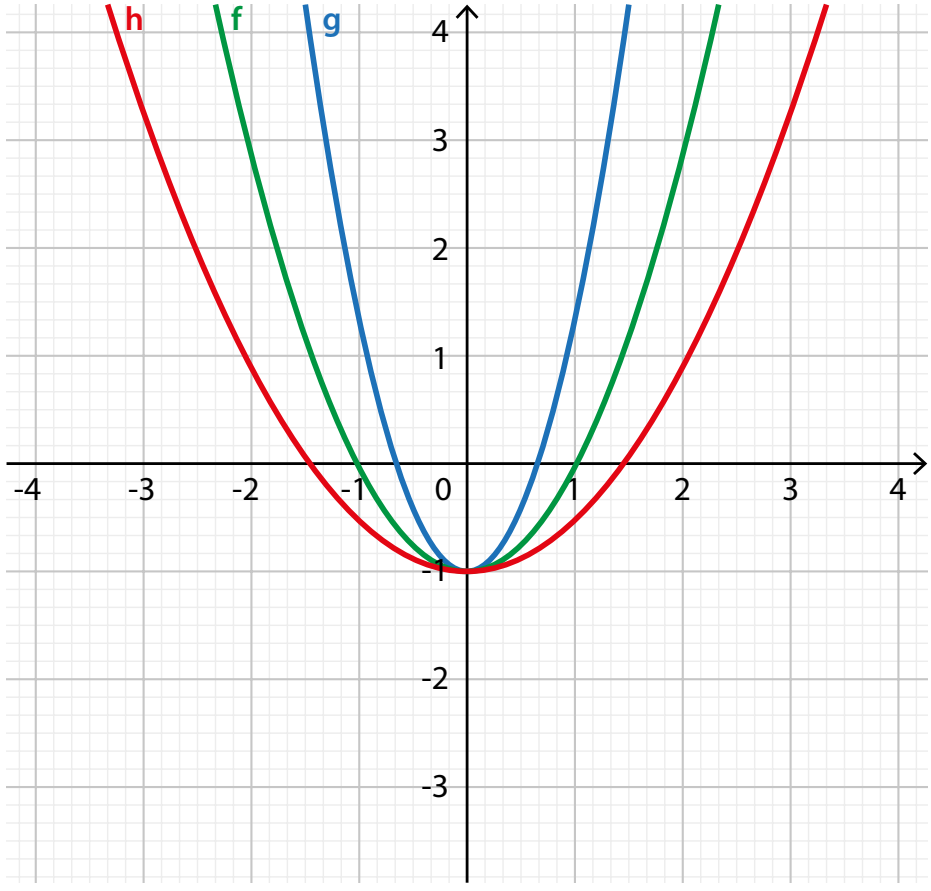


Figura 13 - Abertura da concavidade da função quadrática / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2 - 1$, que representa uma parábola com a concavidade para cima. No mesmo vértice, temos a função $g(x) = 2x^2 - 1$, com abertura menor, e a função $h(x) = \frac{x^2}{2} - 1$, com abertura maior.

Observe que, quando o valor absoluto do coeficiente diminui, a abertura da parábola aumenta. Com relação ao coeficiente c, ele indica o ponto em que a parábola corta o eixo y quando o valor de $x = 0$, de modo que o ponto é definido por $(0, c)$.

Participe da discussão sobre funções e suas aplicações na modelagem matemática para a resolução de problemas e entenda que é uma importante ferramenta que possibilita a análise analítica de dados. Aperte o play, e vamos juntos!

Além dessa análise dos coeficientes da parábola, temos pontos relevantes. Primeiramente, destacamos os zeros ou raízes de uma função. Esses são os pontos em que uma parábola corta o eixo x. Para determinar esses pontos, adotamos a fórmula de resolução de equações de segundo grau, vejamos um exemplo.

Para $f(x) = x^2 + x - 2$, temos a seguinte representação gráfica:

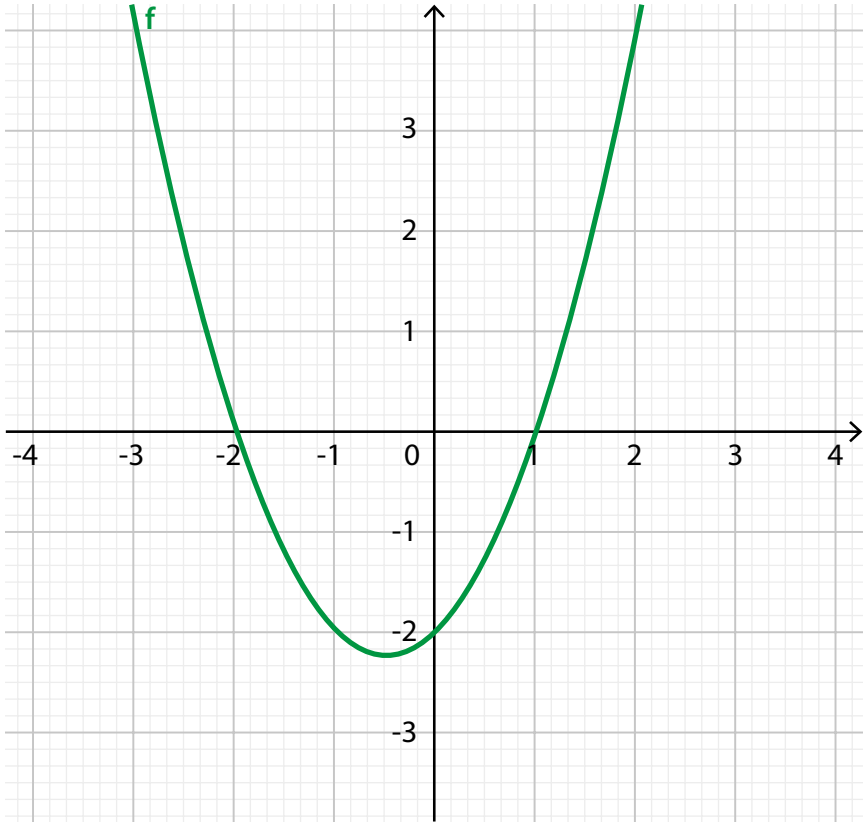


Figura 14 - Zeros de uma função quadrática / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2 + x - 2$, que representa uma parábola com a concavidade para cima, cujos zeros da função cortam o eixo x.

Observe que, no gráfico, a função corta o eixo x nos pontos $(-2,0)$ e $(1,0)$. Esses dois pontos são considerados os zeros ou raízes da função. Algebricamente, determinamos da seguinte forma:

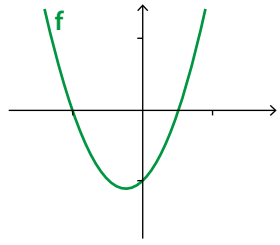
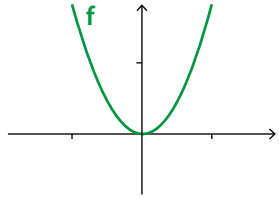
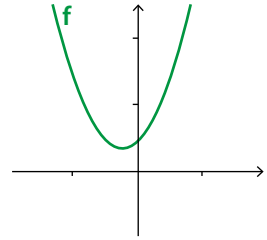
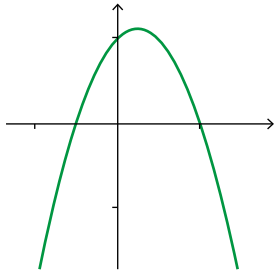
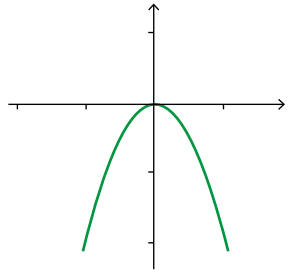
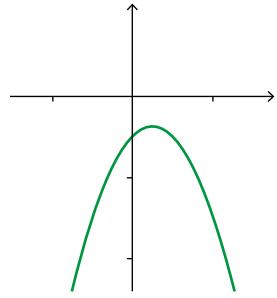
Determinação dos zeros da função quadrática	Descrição da resolução
$x^2+x-2=0$	Os zeros da função ocorrem quando $y=0$, desse modo, igualamos a função a . Definem-se os coeficientes $a=1$, $b=1$ e $c=-2$.
$\Delta=b^2-4ac$ $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)$ $\Delta=1+8$ $\Delta=9$	Substituem-se os coeficientes no discriminante, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem das operações: 1) Potenciação. 2) Multiplicação. 3) Adição e subtração.
$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1}$ $x=\frac{-1\pm3}{2}$ $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$ $x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$	Substituem-se os coeficientes e o resultado do discriminante na segunda parte da fórmula de resolução, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem: 1) Radiciação. 2) Cálculo das raízes. 3) Definição dos zeros da função.

Quadro 9 - Exemplificação de manipulações algébricas para a resolução de equações do segundo grau / Fonte: a autora.

De acordo com os valores definidos pelo discriminante, temos:

1. Se $\Delta>0$, temos duas raízes reais distintas.
2. Se $\Delta=0$, temos uma raiz real.
3. Se $\Delta<0$, não temos raiz real.

No terceiro caso, a parábola não cruza o eixo x. No quadro a seguir, apresentamos as possíveis posições que a parábola pode assumir no plano cartesiano de acordo com os valores do coeficiente a e do discriminante Δ.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Quadro 10 - Posições da parábola no plano cartesiano / Fonte: a autora.

Nas parábolas apresentadas, podemos observar que ocorre simetria em relação ao vértice, de modo que isso sempre ocorre nesse ponto.

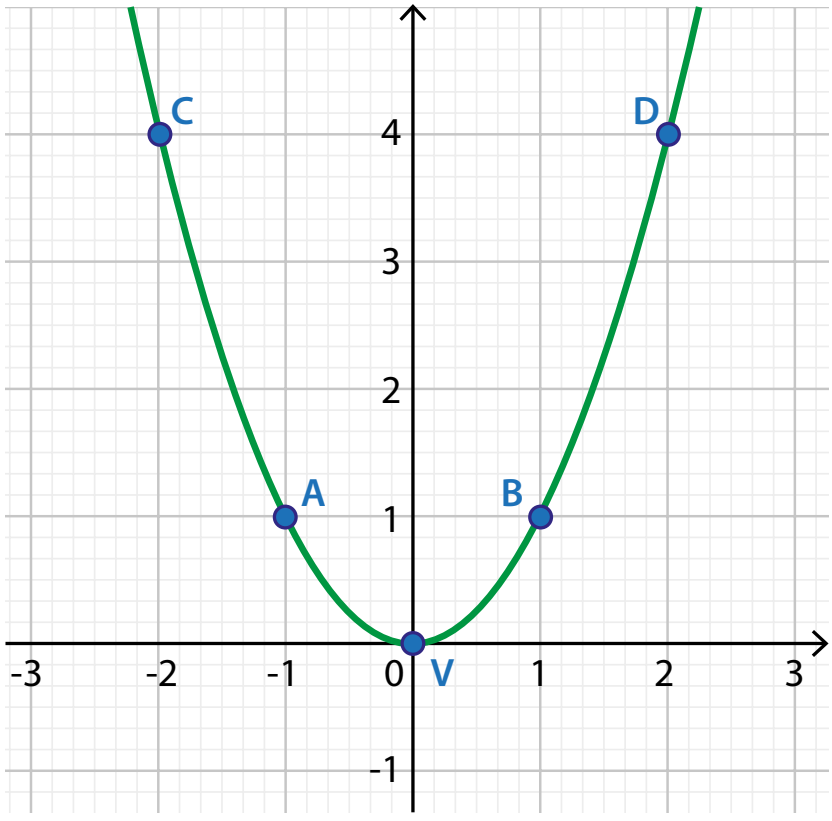


Figura 15 - Representação da simetria da parábola para a função $f(x) = x^2$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, da função $f(x) = x^2$, que representa uma parábola com a concavidade para cima, destacando o vértice e pontos simétricos na parábola.

Quando dois pontos da parábola possuem a mesma ordenada, consideramos que eles são simétricos. Na representação anterior, temos o gráfico da função $f(x) = x^2$. Considere os pontos $A(1,1)$ e $B(1,1)$, ambos assumem $y = 1$, logo são simétricos; de modo análogo, temos o ponto $C(-2,4)$ e o ponto $D(2,4)$, que também são simétricos. Observe que temos o ponto indicado como $V(0,0)$, nesse caso, é o vértice da parábola, em que temos o eixo de simetria, que, nesse caso, coincide com o eixo y das ordenadas. O vértice de uma parábola pode ser obtido por meio das expressões $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Para a função $f(x) = x^2 + x - 2$, temos que:

Determinação do vértice de uma função	Descrição da resolução
$f(x) = x^2 + x - 2$	Definem-se os coeficientes $a = 1$, $b = 1$ e $c = -2$.
$\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$ $\Delta = 1 + 8$ $\Delta = 9$	Substituem-se os coeficientes no discriminante, e realizam-se as operações aritméticas, respeitando a ordem das operações: 1) Potenciação. 2) Multiplicação. 3) Adição e subtração.
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4}$ $V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$	Determinam-se as coordenadas do vértice.

Quadro 11 - Exemplificação de manipulações algébricas para a resolução de equações do segundo grau / Fonte: a autora.

A partir da lei de formação, podemos representar, graficamente, uma função. Em cada caso, temos características específicas. Para ampliar seus estudos sobre o tema, recomenda-se que acesse o QR Code a seguir e faça uma busca por palavras-chave no Geogebra. Seguem algumas sugestões:

- Função modular.
- Função polinomial.
- Função exponencial.
- Função logarítmica.
- Função trigonométrica.

Em cada caso, identifique a lei de formação e analise as particularidades da representação gráfica.

Com base no exposto, vimos as principais características de funções, utilizando as funções do tipo constante, afim e quadrática como exemplo de análise.

Os conteúdos abordados nesta unidade são alguns casos de equações e funções. Desse modo, recomendo que explore mais sobre o tema ao estudar materiais complementares. Recomendamos as seguintes obras: *Cálculo Aplicado: curso rápido*, de Larson (2011); *Cálculo*, de Stewart (2011); e *Cálculo*, de Thomas, Weir e Hass (2012).

Os tópicos relacionados a essa disciplina são ferramentas. Uma das coisas que elas promovem é o desenvolvimento do pensamento matemático e o pensamento relacional, a partir dos quais você começa a buscar padrões e regularidades conforme avançam os tópicos. Nem todas as coisas se aplicam de forma isolada, e, sim, conjugada com diversos outros conteúdos, muitos deles serão complementados em disciplinas específicas.

Imagine-se, enquanto profissional responsável pela gestão de obras, tendo que estimar custos de etapas de serviços. Utilizar métodos analíticos e parâmetros é uma forma para obter esses valores. Considerando o contexto da instalação de placas solares, visto anteriormente, imagine que você realizou o seguinte levantamento de custos:

Descrição	Custo médio (R$)
Custo da placa, cabos, conectores e acessórios para instalação por m²	R$ 1.700,00
Custo de mão de obra especializada	R$ 600,00
Taxa de deslocamento para uma distância de até 20 Km	R$ 100,00
Visita técnica inicial	R$ 200,00
Visita técnica de inspeção final	R$ 200,00

Quadro 11 - Especificações de custos de instalações de placas solares / Fonte: a autora.

Considere que o seu lucro para a prestação de serviços é de 30% do valor do metro de placa instalada. Com base nessas informações, podemos definir uma lei de função que estime a receita desse tipo de serviço. Analisando os custos, temos que o custo da placa, dos cabos, dos conectores e dos acessórios para instalação por m² é variável e o indicaremos como $1700x$; os demais valores da especificação de custos são fixos, dessa forma, podemos somá-los e obter o montante de R$ 1100,00.

Além disso, é preciso considerar o lucro a ser obtido, como ; podemos indicar que isso corresponde a $0,3 \cdot 1700x$, dessa forma, podemos escrever a função da seguinte forma: $f(x) = 1700x + 1100 + 0,3 \cdot 1700x$, que seria a receita igual a custo mais lucro; adicionando os termos semelhantes, temos $f(x) = 2210x + 1100$. Temos um caso de função afim, que permite obter a estimativa de preço a ser repassada para um cliente para a instalação de placas solares. De modo que, se a residência em que se instalarão as placas possuir disponível 10 metros para a instalação, o valor a ser cobrado deverá ser obtido por meio de $f(50) = 2210 \cdot 10 + 1100 = 23200$, ou seja, R$ 23.200,00.

A partir do termo central “função”, podemos produzir um mapa mental, estabelecendo relações com conjuntos, equações, tipos de funções e representações gráficas. Para desenvolver essa atividade, recomendamos que se baseie no exemplo a seguir e complemente com as informações mais relevantes de cada tópico. Finalize com o uso da ferramenta gratuita disponibilizada em https://www.goconqr.com/.

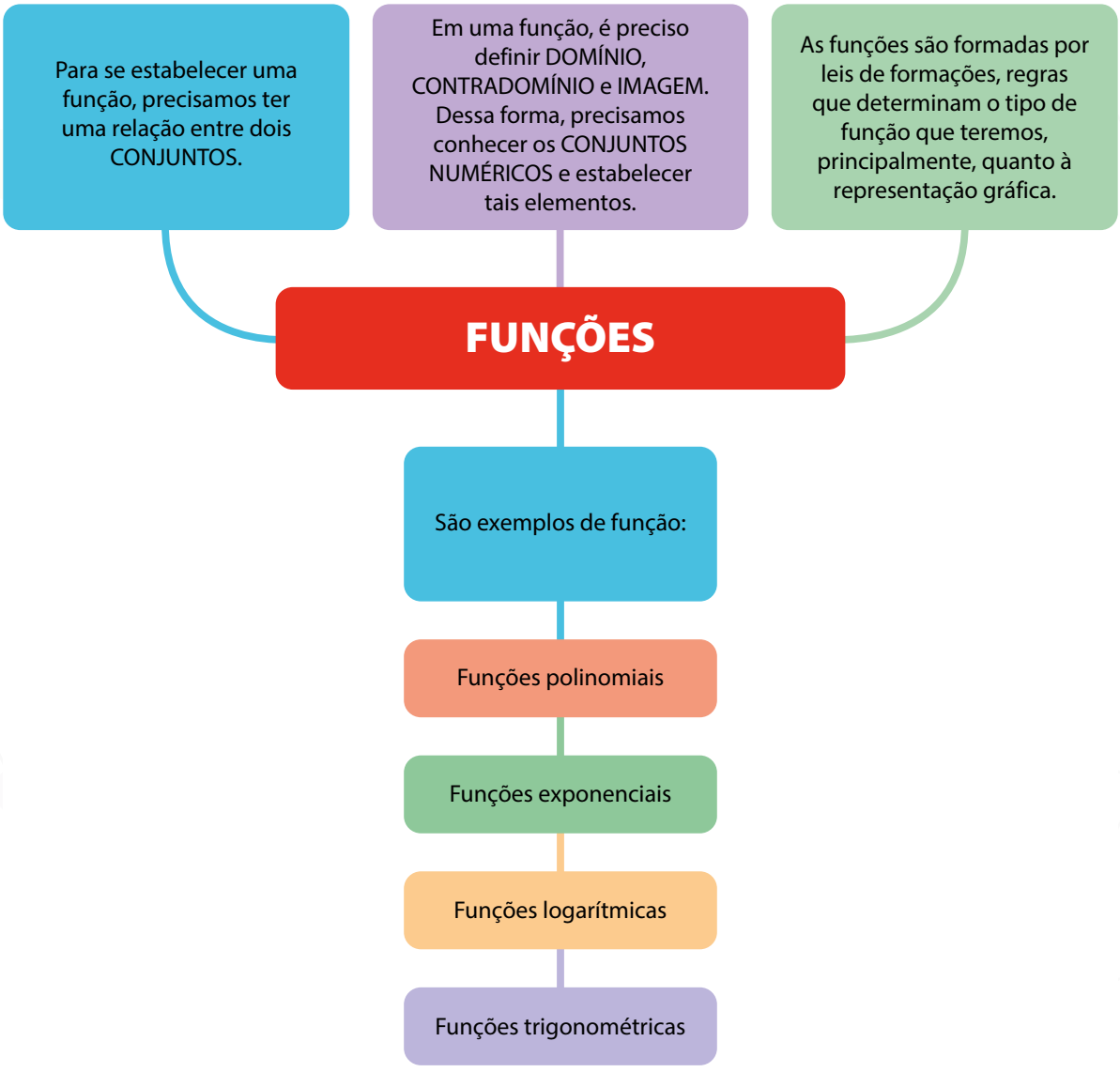


Figura 16 - Mapa mental sobre funções / Fonte: a autora.

MAPA MENTAL

1. Para que seja possível definir uma função, é preciso que uma lei de formação relacione o domínio e o contradomínio. Dados os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$ e a relação $f : A \to B$, tal que $f(x) = 2x + 1$, e sabendo que o conjunto imagem é um subconjunto do domínio, podemos afirmar que ele é dado pelo conjunto:

   a) $\text{Im}(f) = \{1, 4, 7\}$.

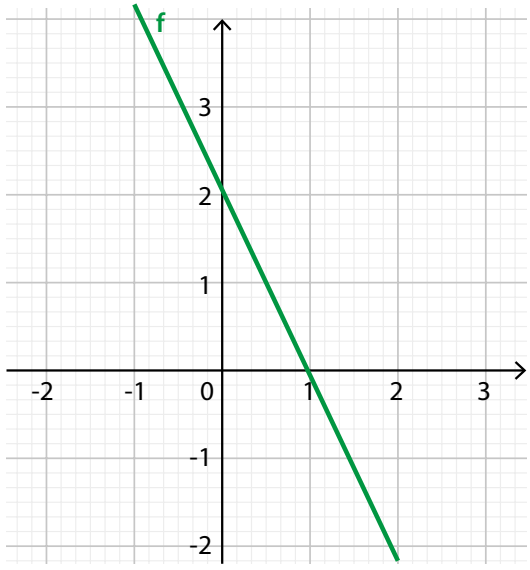
   b) $\text{Im}(f) = \{0, 1, 2\}$.

   c) $\text{Im}(f) = \{1, 2, 3\}$.

   d) $\text{Im}(f) = \{2, 3, 5\}$.

   e) $\text{Im}(f) = \{3, 5, 7\}$.

2. Considere que o resultado de uma modelagem matemática foi uma função afim do tipo $f(x) = -2x + b$. Ao representar graficamente a função, obteve-se o seguinte gráfico:



Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho da função afim $f(x) = -2x + b$, sendo uma reta decrescente, que corta o eixo vertical no ponto $(0, 2)$, e o eixo horizontal, no ponto $(1, 0)$.

Ao analisar o gráfico, podemos concluir que o valor do coeficiente linear da função afim será:

   a) $a = 2$.

   b) $a = -2$.

   c) $b = 2$.

   d) $b = -2$.

   e) $b = 0$.

3. As funções quadráticas são do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Elas constituem ferramentas que possibilitam analisar situações problemas descritas pelo movimento em forma de parábolas, por exemplo. Com base nisso, julgue as sentenças a seguir como verdadeiras (V) ou falsas (F).

   I) Toda função quadrática com o coeficiente $a < 0$, ao representar graficamente, possui a concavidade voltada para baixo.

   II) Toda função quadrática com o coeficiente $a > 0$, ao representar graficamente, possui a concavidade voltada para cima.

   III) Todo zero ou toda raiz de uma função é obtido(a) quando aplicamos $x = 0$ na função.

   Assinale a alternativa que corresponde, respectivamente, ao julgamento das sentenças.

   a) F, F, V.

   b) V, F, F.

   c) F, V, F.

   d) V, V, F.

   e) F, V, V.

3 Limites e derivadas de funções reais

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, trataremos dos conceitos relacionados a funções reais, expandido a discussão sobre os tipos de funções e as suas representações gráficas. A partir disso, estudaremos conceitos que ampliam os estudos de funções, como limites, continuidade e derivadas. Nosso objetivo é conhecer os conceitos, obtendo uma noção intuitiva a partir de suas definições, ver exemplos de aplicações deles, além de buscar suas relações com outras áreas do conhecimento. Bons estudos!

Existem construções que não são mais necessárias ou, ainda, pode ser preciso desocupar espaços para que possam ser reutilizados. Para isso, um dos recursos que pode ser utilizado é a demolição. É possível aplicá-la em diversas construções, como casas, prédios e pontes, principalmente, se as estruturas estiverem comprometidas. No caso da demolição de prédios, é preciso realizar o procedimento de modo calculado, devido ao impacto aos arredores, evitando adversidades e riscos à população e ao entorno, sendo necessário um levantamento de toda a área onde se encontra o prédio a ser demolido. Veja, na imagem a seguir, um exemplo de prédio pronto para ser demolido.

Figura 1 - Edifício abandonado e pronto para ser demolido

Descrição da Imagem: ilustração de um edifício vertical de cinco pavimentos deteriorado e pronto para a demolição.

Sendo o(a) profissional responsável para preparar a demolição de um edifício abandonado, quais seriam as etapas de realização? Quais são os riscos envolvidos? Onde você vê a Matemática envolvida no processo? Quais são os cálculos que teria que fazer?

Pode haver a necessidade de indicar a demolição de prédios quando estes já possuem um limite aceitável de idade ou, ainda, quando o custo de manutenção é elevado para manter o prédio, levando, em ambos os casos, ao comprometimento da segurança dos usuários ou das imediações.

Na atualidade, temos diversas técnicas para que a execução da demolição seja feita de modo adequado, podendo ser realizada de modo mecânico, por meio de guindastes, escavadeiras, entre outros. Também, pode ser realizada a demolição com o uso de explosivos. De qualquer forma, é preciso ter suporte técnico especializado e evitar o máximo de ruídos e vibrações durante o procedimento, minimizando os impactos para os arredores da área demolida.

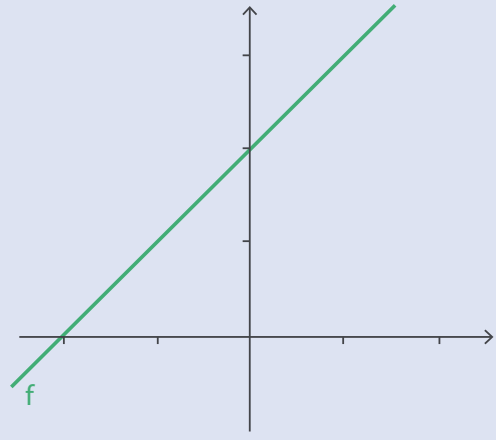
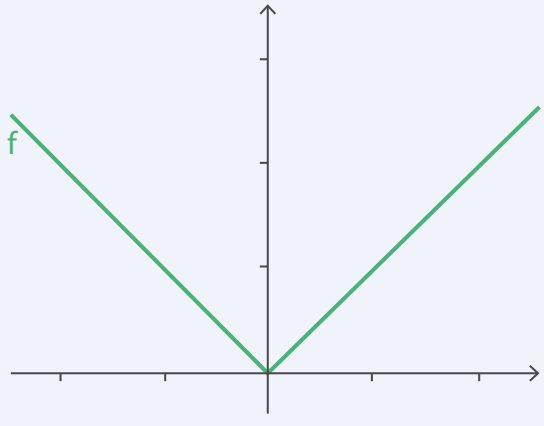
No caso da demolição, podemos ter diversos corpos se deslocando, provocando um movimento ao longo de uma reta, sendo necessário analisar deslocamento, velocidade, módulo da velocidade, aceleração e torque. Para esse tipo de análise, é preciso conhecer a posição do objeto em função do tempo. Como podemos proceder com esse tipo de análise? Você se lembra das fórmulas e equações utilizadas para esses cálculos? Faça suas anotações no Diário de Bordo.

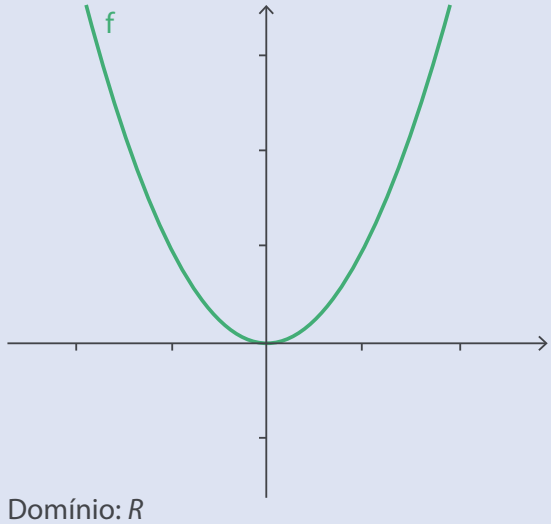
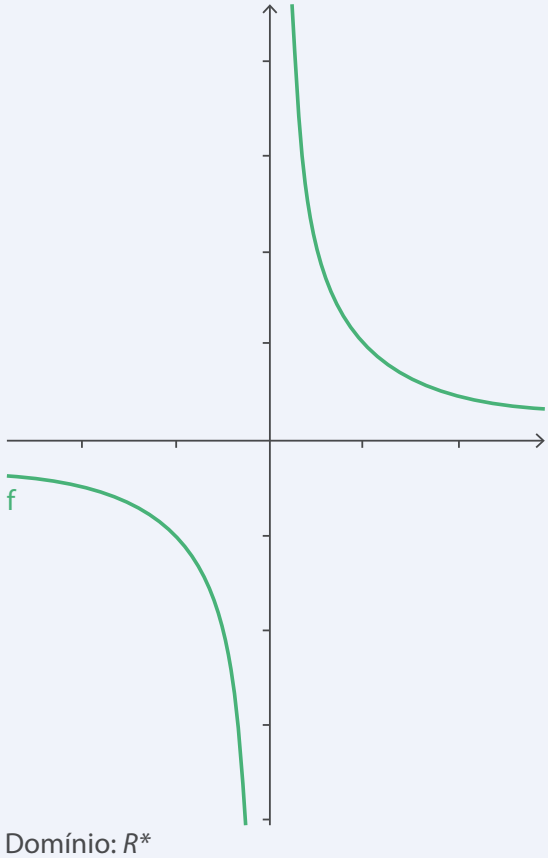
Considere que o deslocamento de um objeto ao longo de uma reta é dado pela variação obtida por meio da diferença entre ponto final (p_2) e ponto inicial (p_1). Em termos notacionais, temos $\Delta s = p_2 - p_1$; enquanto a velocidade média, nesse intervalo, é dado por $V_m = \dfrac{deslocamento}{tempo\ decorrido} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Para calcular a velocidade do corpo em um exato instante t, é preciso calcular o limite da velocidade média no intervalo deslocado tendendo a zero. Esse conceito está associado à derivada de f em relação a t.

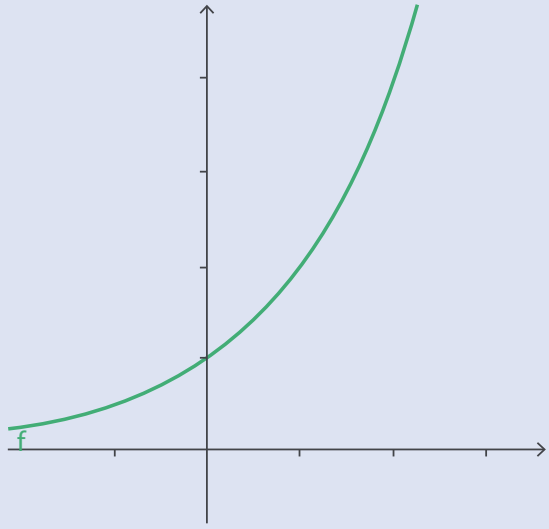
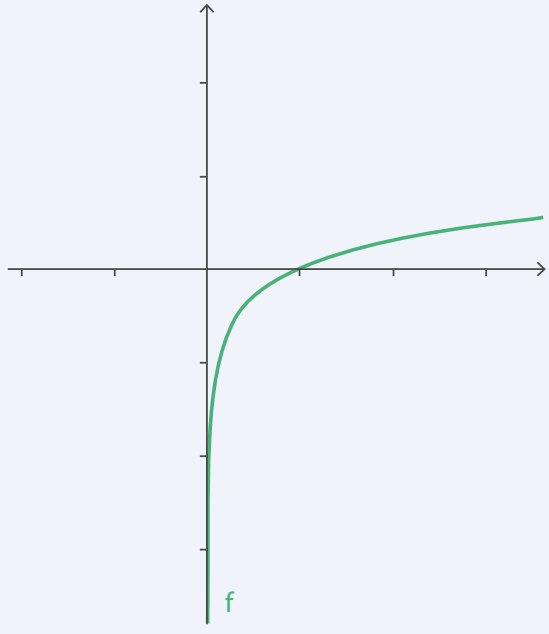
DIÁRIO DE BORDO

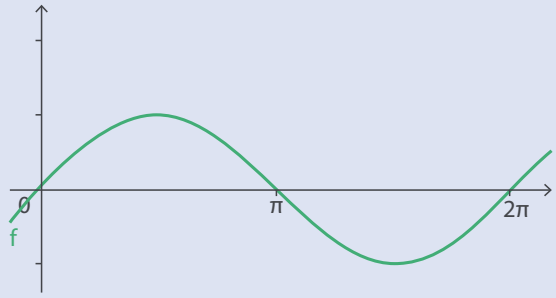
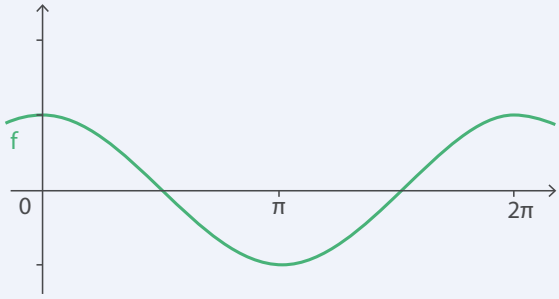
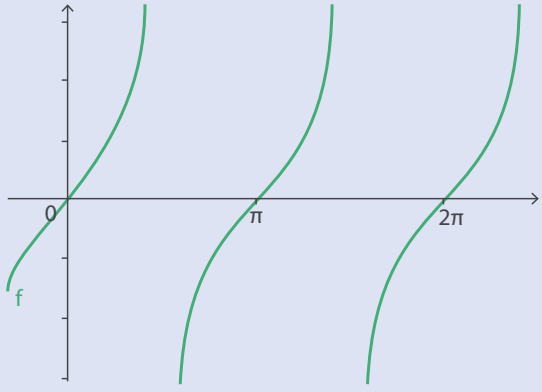
Antes de abordarmos os limites e as derivadas de funções reais, precisamos expandir o conceito sobre funções para, posteriormente, conceituar limites e continuidade e, a partir disso, definir derivadas.

Temos diversos tipos de funções. Na grande maioria, são composições de mais de um tipo, como, por exemplo, combinar funções polinomiais e trigonométricas. Vejamos alguns tipos de funções e suas respectivas leis de formações:

Função	Lei de formação	Representação gráfica
Função afim	$f(x) = ax + b$ e $a \neq 0$ Exemplo de aplicação: conversão de temperatura da escala Farenheit (F) para a escala Celsius (C). $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$	 Domínio: *R* Imagem: *R*
Função modular	$f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$ ou expressa de forma compacta como $f(x) = \lvert x \rvert$. A característica dessa função é ser definida em partes.	 Domínio: *R* Imagem: *R+*

Função	Lei de formação	Representação gráfica
Função quadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$ e $a \neq 0$ A característica dessa função é obter uma representação gráfica no formato de parábola.	 Domínio: *R* Imagem: *R+*
Função com assíntota	$f(x) = \frac{1}{x}$ e $x \neq 0$ A característica dessa função é obter uma representação gráfica no formato de hipérbole com assíntotas em relação ao eixo y devido à restrição do domínio. Um fenômeno físico que pode ser descrito por esse tipo de função é o equilíbrio entre produção de calor no interior de um corpo e o calor que emana por sua superfície, podendo ser expresso por $q = \frac{3k}{r}$, em que q corresponde a calorias, r é o raio de um corpo esférico, e k é uma taxa.	 Domínio: *R** Imagem: *R**

Função	Lei de formação	Representação gráfica
Função exponencial	$f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Aplicada em crescimentos populacionais, taxas de juros com crescimento exponencial e taxas de decaimentos radioativos.	 Domínio: R Imagem: R_+^*
Função logarítmica	$f(x) = \log_a x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. Também considerada como função inversa da exponencial, ao ser aplicado em funções exponenciais que exigem situações de determinação de tempo, possibilita encontrar o resultado. O uso de logaritmos se dá na medida de intensidade do som. Sendo a intensidade do som em watts por metro quadrado, o nível de decibéis do som é dado por: $10\log(Ix10^{12})db$.	 Domínio: R_+^* Imagem: R

Função	Lei de formação	Representação gráfica
Função seno	$f(x) = sen(x)$ se trata de uma função trigonométrica. A variável independente é dada em radianos.	 Domínio: *R* Imagem: [-1,1]
Função cosseno	$f(x) = \cos(x)$ se trata de uma função trigonométrica. A variável independente é dada em radianos.	 Domínio: *R* Imagem: [-1,1]
Função tangente	$f(x) = tg(x)$ se trata de uma função trigonométrica. A variável independente é dada em radianos.	 Domínio: $R - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$ Imagem: [-1,1]
Observações: 1) Quando se indica, em um conjunto numérico, sobrescrito, o *, implica que se excluiu o zero no conjunto. 2) Quando se indica, em um conjunto, subscrito, o sinal de +, implica em números não negativos. 3) Quando se indica, em um conjunto, subscrito, o sinal de –, implica em números não positivos.		

Quadro 1 - Tipos de funções / Fonte: a autora.

Cada uma das funções apresentadas são casos de funções reais de uma variável. Elas podem ser definidas para outros conjuntos numéricos, além dos indicados, entretanto, é preciso satisfazer a definição formal de função.

Podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir funções. Quando isso ocorre, surgem novas funções com características próprias. Além disso, podemos aplicar outras operações, como transladar as funções nos eixos horizontais e verticais, isso provoca uma alteração na lei de formação e posicionamento no gráfico. Para aprofundar os seus estudos sobre os tipos de funções, recomendo o estudo do material complementar disponível no QR Code.

Dentre as funções ilustradas no Quadro 1, destacamos as funções trigonométricas. Elas são fundamentadas na Trigonometria, em que, no triângulo retângulo, são estabelecidas as relações como seno, cosseno e tangente. Na construção de uma residência, temos diversas situações em que precisamos obter a inclinação (i), como nas etapas de fundação, estrutura, acabamento, telhado, entre outras. No caso do telhado, é preciso analisar a inclinação e o tipo de telha que serão utilizados. Essa relação implica que quanto menos inclinado, mais o peso das telhas contribui para que o telhado estabilize, minimizando problemas futuros, como o escorregamento de telhas. Nos casos envolvendo a inclinação, temos a aplicação da relação trigonométrica da tangente. Vejamos uma aplicação direta no cálculo de inclinação de rampas:

Considere o exemplo a seguir de uma rampa que foi projetada para conectar dois ambientes com meio metro de desnível. Determinaremos o seu comprimento mínimo.

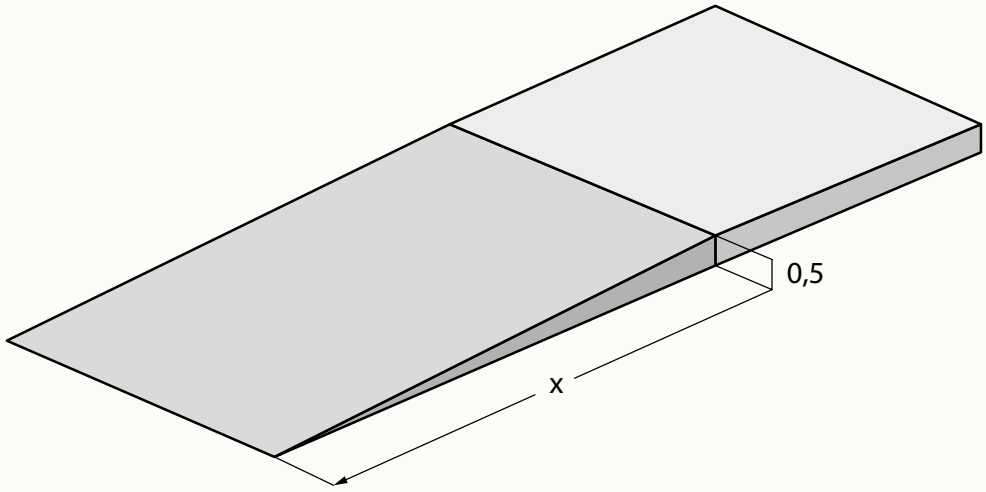


Figura 2 - Rampa em desnível de meio metro / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de uma rampa para um desnível de meio metro de altura.

Nesse caso, se utilizarmos a inclinação máxima de 8,33%, de acordo com a NBR 9050/2020 (ABNT, 2020), obteremos o comprimento mínimo dessa rampa.

Desse modo, $i = 8,33\% = 0,0833 \rightarrow tg(\alpha) = 0,0833$, considerando que a tangente é obtida pela relação:

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$0,0833 = \frac{0,5}{x}$$

$$x = \frac{0,5}{0,0833}$$

$$x \simeq 6$$

Ou seja, o comprimento mínimo dessa rampa deverá ser de 6 metros.

Outra aplicação da Trigonometria se dá, na Topografia, quando utilizamos o teodolito nos canteiros de obras para verificar os níveis do terreno, conforme a ilustração a seguir:

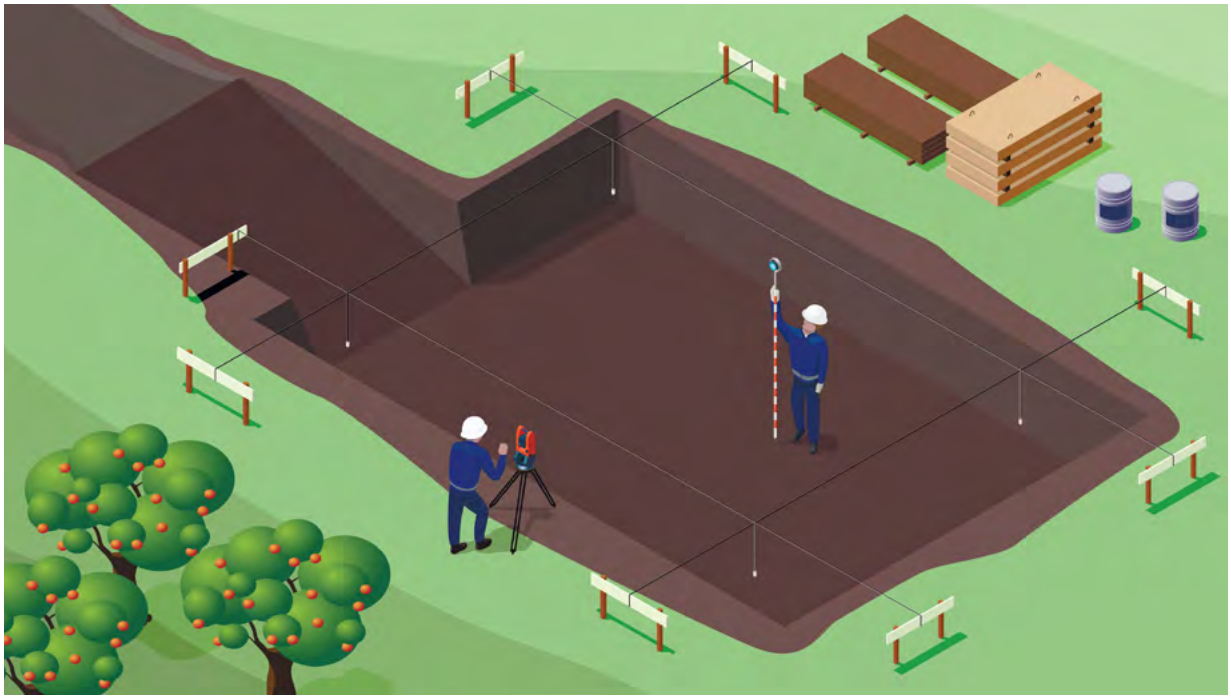


Figura 3 - Ilustração da aplicação do teodolito

Descrição da Imagem: ilustração de um canteiro de obras em que se prepara a fundação com o uso do teodolito para verificar os níveis.

Nesse caso, a medição é realizada pelo equipamento teodolito, entretanto, para a configuração da leitura dos dados, é necessária a programação envolvendo as relações trigonométricas. Vejamos a manipulação do equipamento.

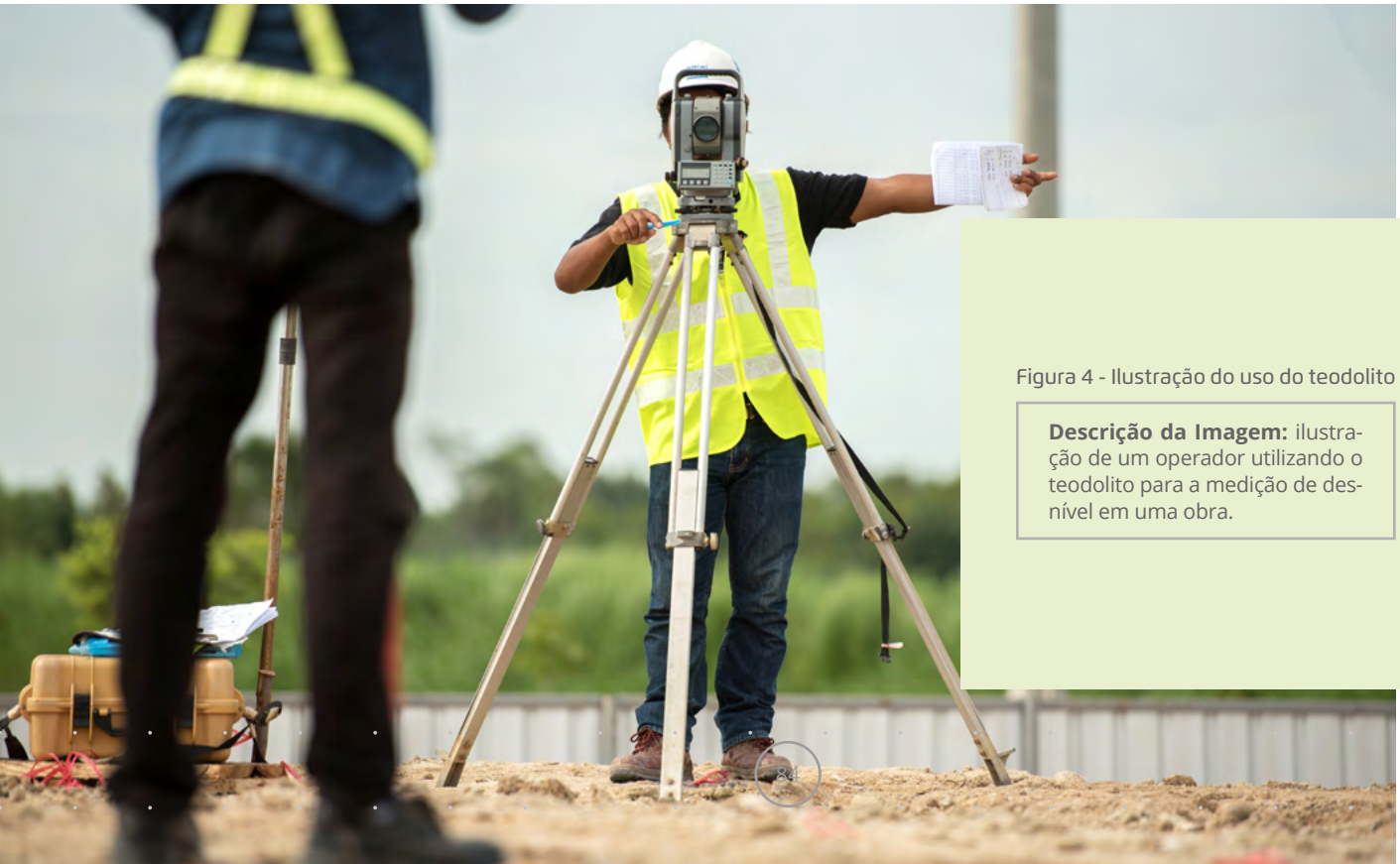


Figura 4 - Ilustração do uso do teodolito

Descrição da Imagem: ilustração de um operador utilizando o teodolito para a medição de desnível em uma obra.

As funções trigonométricas, quando aplicadas em diferentes contextos, podem ser associadas a movimentos pendulares e relações cíclicas devido ao comportamento desse tipo de função.

Cada tipo de função apresentada anteriormente possui características e aplicações específicas. Vejamos um exemplo de função envolvendo o seno quando contextualizada.

Ao considerar a aceleração do movimento em queda livre de um corpo se aproximando da superfície terrestre, devido às forças de atração dos corpos, ela é denominada aceleração da gravidade, sendo um valor, em geral, constante. Contudo, temos fatores que interferem nessa aceleração, como a latitude e a altitude. Se considerarmos a latitude zero, que ocorre ao nível do mar, a variação da gravidade é dada pela seguinte função $g = 9,7804\left(1 + 0,0052 \cdot sen^2\alpha\right)$, em que g é a aceleração da gravidade, e α , a latitude em graus.

Há outros tópicos relevantes no estudo da Trigonometria e das funções trigonométricas, como:

- Circunferência trigonométrica.
- Unidades de medidas em radianos e em graus.
- Relações do seno, cosseno e tangente com o círculo trigonométrico.
- Relações trigonométricas fundamentais.
- Outras funções trigonométricas, como secante, cossecante e cotangente.
- Funções trigonométricas inversas.

Para estudar esses tópicos e verificar exemplos resolvidos, acesse o material complementar disponível no QR Code.

Daremos continuidade ao estudo dos limites, um conceito elementar para explicar outros, como derivadas e integrais. Quando analisamos expressões arbitrariamente próximas, o seu significado depende do contexto, podendo ser, por exemplo, uma medição com aproximação de milésimos de centímetros, a análise do limite de carga de um elevador, dentre outras. Entretanto, a definição de limites precisa ser suficiente para analisar o limite de funções específicas. Podemos definir, intuitivamente, esse conceito por meio de sequências numéricas e da análise de gráficos de funções. Vejamos um exemplo para conceituar limites:

Suponha que, em um determinado experimento, é necessário obter determinada medida. Ao considerar a pressão do ar igual a zero, sabendo que não é possível obter o vácuo absoluto, o procedimento deve ser a obtenção das medidas com valores cada vez menores de pressão, que tenderá para um determinado número L, ou seja, o vácuo seria assumido igual ao valor L. Adote $x:$ *pressão* e a medida dada por $f(x)$. Assim, o resultado desse experimento é dado por: $\lim_{x\to 0} f(x) = L$, que é uma aplicação prática do conceito de limites.

O conceito de limites possui diversas aplicações na Física, eletricidade, mecânica, entre outras áreas. Faremos a análise de uma função $f: R \to R$, definida por $f(x) = x - 5$. Construímos um quadro para analisar os valores de x próximos de 5, à direita e à esquerda.

Análise de valores à esquerda		Análise de valores à direita	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
4	-1	6	1
4,5	-0,5	5,5	0,5
4,8	-0,2	5,3	0,3
4,9	-0,1	5,1	0,1
4,99	-0,01	5,01	0,01
4,999	-0,001	5,001	0,001

Quadro 2 - Análise de limites laterais / Fonte: a autora.

Analisando o quadro anterior, conforme os valores se aproximam de cinco, tanto à direita quanto à esquerda, notamos que os valores se aproximam de zero. Desse modo, podemos inferir que:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5} f(x) = 0$$

Quando indicamos, na notação de limite, o sinal negativo sobrescrito, temos um limite lateral à esquerda; quando indicamos o sinal positivo sobrescrito, temos um limite lateral à direita; são chamados de limites laterais. Se ambos convergirem para o mesmo valor, dizemos que o limite no ponto analisado existe. De modo genérico, temos:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Para a aplicação dos limites, utilizam-se as seguintes regras:

1. O limite da soma de duas funções é a soma dos seus limites.
2. O limite da diferença de duas funções é a diferença de seus limites.
3. O limite do produto de duas funções é o produto dos seus limites.
4. O limite de uma constante multiplicada pela função constante é a constante multiplicada pelo limite da função.
5. O limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador não seja zero.
6. O limite de uma potência racional de uma função é a potência do limite da função, desde que a última seja um número real (THOMAS *et al.*, 2002, p. 97).

Vejamos alguns exemplos de aplicações de limites.

a) Limite de função polinomial:

$$\lim_{x\to 3}(x^3+4x^2-3)=3^3+4\cdot 3^2-3=60$$

b) Limite de função com quociente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-1}{x^2+5}=\frac{1^2+1-1}{1^2+5}=\frac{1}{6}$$

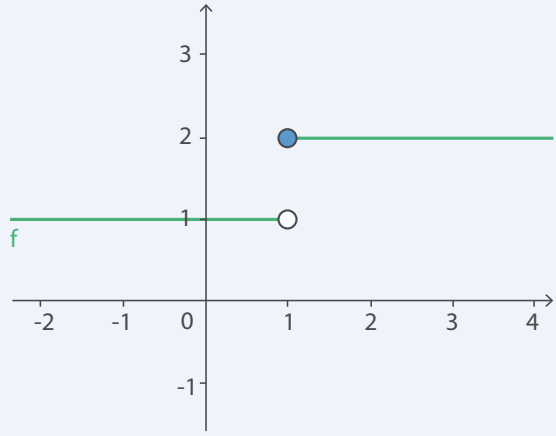
c) Limite de função com radical:

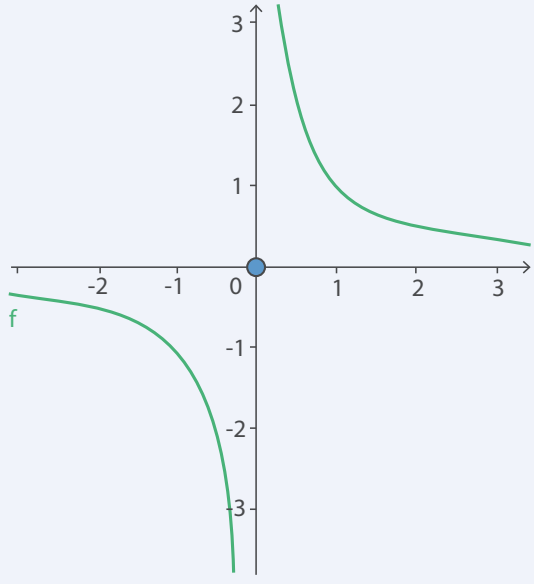
$$\lim_{x\to -2}\sqrt{3x^2-4}=\sqrt{3\cdot(-2)^2-4}=\sqrt{8}$$

As funções podem ser utilizadas para realizar projeções. Para isso acontecer, é preciso que ela seja contínua em um intervalo definido, de modo que não haja, em uma curva, a interrupção de pontos, para, assim, mostrar os possíveis valores de uma função. Quando isso acontece, dizemos que a função é contínua; caso haja interrupção, temos um caso de descontinuidade. Para que seja contínua, é preciso satisfazer as seguintes condições:

1) A função está definida para todos os pontos do domínio.
2) Quando o limite é aplicado a qualquer ponto do domínio, esse limite existe.
3) O valor obtido na aplicação do limite é igual ao valor aplicado na função.

Há situações em que os limites não podem ser aplicados. Façamos a análises das funções indicadas a seguir.

<table>
<tr><th>Função</th><th>Representação gráfica</th></tr>
<tr><td>$f(x)=\begin{cases}1, & x<1\\ 2, & x\geq 1\end{cases}$</td><td> 

Domínio: R
Imagem: {1,2}</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: essa é uma função denominada salto unitário. Para $x=1$, temos que o limite lateral esquerdo é igual 1, enquanto o limite lateral direito é igual a 2. Se os limites laterais são distintos, entendemos que o limite no ponto $x=1$ não existe.</td></tr>
<tr><td>$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$</td><td> 

Domínio: R
Imagem: R</td></tr>
<tr><td colspan="2">Análise: essa função possui assíntotas, entretanto, foi definida para todos os pontos; mas, quando analisamos o valor $x=0$, o limite lateral esquerdo tende para $-\infty$, e o limite lateral direito tende para $+\infty$, ou seja, os limites laterais são diferentes, logo não há limite para $x=0$.</td></tr>
</table>

Quadro 3 - Análise da não ocorrência do limite / Fonte: a autora.

No caso da função $f(x)=\frac{1}{x}$, podemos analisar seus valores no Quadro 4:

x	$f(x)$
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
10	$\frac{1}{10}=0,1$
100	$\frac{1}{100}=0,01$
1000	$\frac{1}{1000}=0,001$
10000	$\frac{1}{10000}=0,0001$

Quadro 4 - Análise da função $f(x)=\frac{1}{x}$ / Fonte: a autora.

Verificamos que, quando o valor de x aumenta por meio dos valores positivos, os valores da função tendem, cada vez mais, para zero. Simbolicamente, expressamos da seguinte forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Lê-se: limite da função $\frac{1}{x}$, quando x tende a mais infinito, é igual a zero.

Nesse caso, o símbolo $+\infty$ não representa um número real, e, sim, o comportamento da função em relação à variável independente x.

Para explorar a representação gráfica dessa função, acesse o QR Code que o direcionará para a página inicial indicada a seguir.

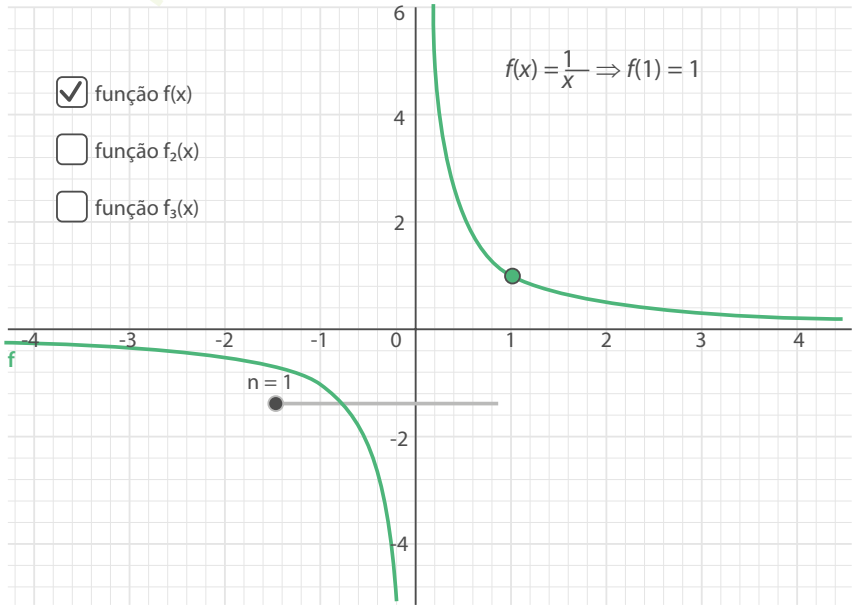


Figura 5 - Ilustração do comportamento de funções com limites tendendo ao infinito / Fonte: a autora.

Descrição da imagem: indicação de animação contendo três funções que possuem representações gráficas com limites tendendo ao infinito.

Nessa representação, você pode acionar o ponto n e direcionar para a esquerda e direita, observando o destaque no comportamento da função. Repita o processo para as outras funções disponíveis. Para inserir os gráficos das funções, utilize o site do geogebra.org, selecione a opção calculadora e digite, na janela da Álgebra, a lei de formação. Você poderá, dessa forma, explorar outros exemplos.

Existem situações em que as funções descontínuas implicam na ocorrência de fenômenos físicos. Vejamos o exemplo a seguir.

A representação gráfica a seguir está relacionado a uma função que associa a voltagem (V) em relação ao tempo (t):

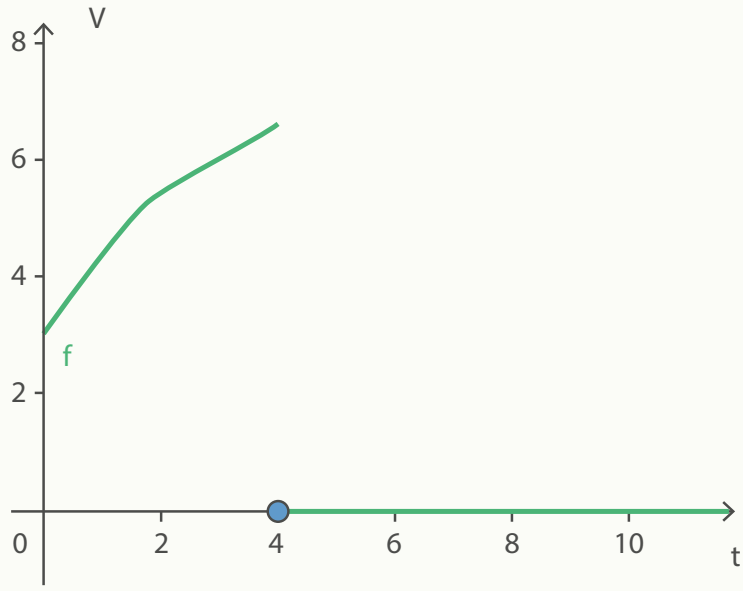


Figura 6 - Ilustração do gráfico de uma função da voltagem em função do tempo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho, no plano cartesiano, de uma função em que a voltagem possui atribuições de valores maiores que 3 até o instante t = 4. Após isso, a voltagem é igual a 0.

Observe que, para $t = 4$, há uma descontinuidade no gráfico. Isso ocorreu devido ao fato da voltagem cair para zero quando a linha foi cortada.

Outra aplicação de limites é na análise da corrente variando em função do tempo. Vejamos o exemplo a seguir.

Observe a ilustração de um circuito elétrico:

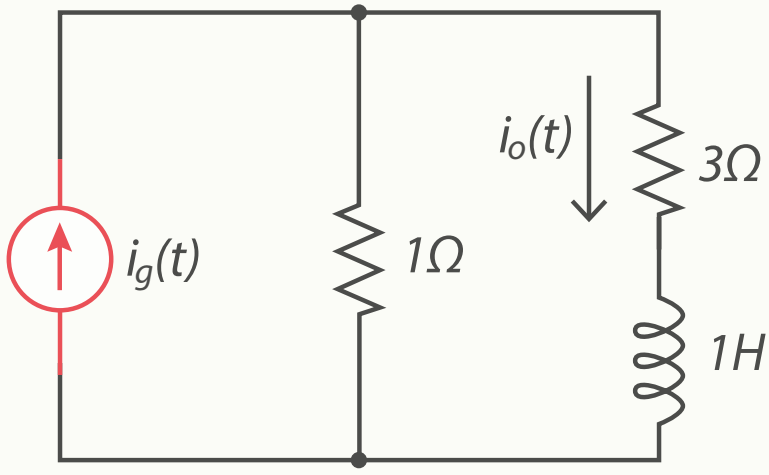


Figura 7 - Ilustração de um circuito elétrico / Fonte: Wikimedia Commons (2016, on-line).

Descrição da Imagem: desenho de um circuito elétrico para a análise da corrente variando em função do tempo.

Precisamos considerar a corrente aplicada em um circuito elétrico, no qual ocorre a descarga de um capacitor e uma resistência. Na análise desse tipo de situação, aplica-se uma função exponencial em função do tempo (t), que depende dos dados do capacitor e da resistência. A partir disso, é possível determinar a corrente inicial, analisar a variação da corrente quando t cresce indefinidamente, aplicar os limites quando t tende ao infinito e representar graficamente a corrente em função do tempo.

Podemos aplicar os limites em diversas situações. Uma aplicação direta seria na velocidade instantânea. Como isso acontece

Com base em Thomas *et al.* (2002), ao adotar $s = s(t)$, tem-se a equação horária relativa ao movimento de um ponto material na reta numérica, ou seja, $s(t)$ corresponde à coordenada do ponto material no instante t. Assim, a velocidade média do ponto material, no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, é obtida pela razão entre o espaço percorrido e o tempo decorrido. Em termos notacionais, é dada por:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Quando verificamos a velocidade instantânea do ponto material no instante t, aplicamos o limite da velocidade média $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quando Δt tende para 0. Em termos notacionais, temos:

$$V = V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Essa aplicação de limite é a definição da derivada da posição em relação ao tempo. Aplicaremos essa definição no seguinte exemplo:

Considere a função $s(t) = 3t^2 + 10t$ como a equação horária de um ponto material que se movimenta numa reta numérica. s se dá em metros, e t, em segundos. Desse modo, podemos obter:

a) A velocidade média do ponto material no intervalo de tempo [2, 3].

$$V_m = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} =$$

$$V_m = \frac{(3 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3) - (3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2)}{2} =$$

$$V_m = \frac{27 + 30 - 12 - 20}{2}$$

$$V_m = \frac{25}{2} = 12,5 \ m/s$$

b) A velocidade instantânea no instante t = 1.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(1 + \Delta s) - s(1)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(1 + \Delta t)^2 + 10(1 + \Delta t) - (3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{3 \cdot 1 + 3(\Delta t)^2 + 3 \cdot 2 \cdot \Delta t + 10 + 10 \cdot \Delta t - 3 - 10}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(\Delta t)^2 + 16\Delta t}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (3 \cdot \Delta t + 16) = 16 \ m/s$$

A partir do limite que determina a derivada, é possível medir a taxa de variação de uma função, calcular a velocidade e a aceleração, estimar a taxa de disseminação de uma doença, estabelecer níveis de produção eficientes, calcular dimensões ideais e determinar a idade de um artefato pré-histórico.

O processo para calcular uma derivada é denominado derivação, ou seja, aplica-se uma operação em uma função $y = f(x)$, indicada com a notação:

$$\frac{d}{dx} f(x) \text{ ou } f'(x)$$

Considerando, como exemplo, uma função linear, ilustraremos o processo de derivação para $f(x) = 3x - 2$. Vejamos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(3x-2) = 3$$

Podemos analisar a derivada por meio da intersecção de uma curva com uma reta secante, ou seja, uma reta que toca em dois pontos da curva conforme a ilustração a seguir.

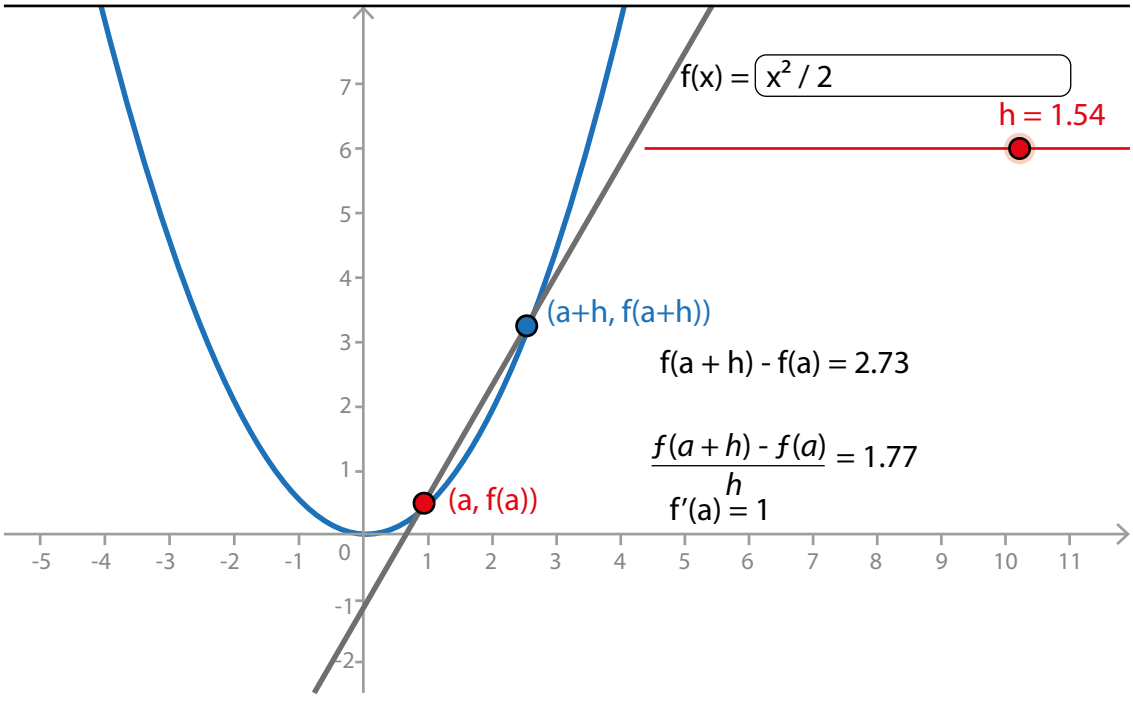


Figura 8 - Interpretação geométrica da derivada dada por uma reta secante / Fonte: Geogebra ([2021], on-line)[1].

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano, de uma função em que o limite, em determinado ponto, corresponde à derivada da função, indicado pela reta secante que toca dois pontos da curva.

Acesse o gráfico dinâmico da representação gráfica anterior pelo QR Code e movimente o ponto , observando que a reta secante sempre toca dois pontos da curva que representam a função $f(x)$.

Quando aplicamos o limite na diferença entre os dois pontos que tocam a curva, eles se coincidem, e teremos uma reta tangente à curva. A partir desse conceito, se dá a definição formal de derivadas, indicada por:

> Seja a função $f(x)$ em relação à variável x. A derivada é a função f', cujo valor, em x, é dado por: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, desde que o limite exista.

Para representar as derivadas graficamente, precisamos compreender as retas tangentes. De acordo com Thomas *et al.* (2002), o estudo sobre esse tema se iniciou no século XVII, em um caso sobre ótica, em que a tangente determinava o ângulo do raio de luz ao penetrar em uma lente curva; já em mecânica, a tangente determinava a direção do movimento de um corpo em qualquer ponto do percurso; em Geometria, as tangentes das curvas num ponto de intersecção determinam o ângulo em que as curvas se cortam. Vejamos, a seguir, uma representação gráfica que ilustra o comportamento de uma reta tangente em relação a uma curva.

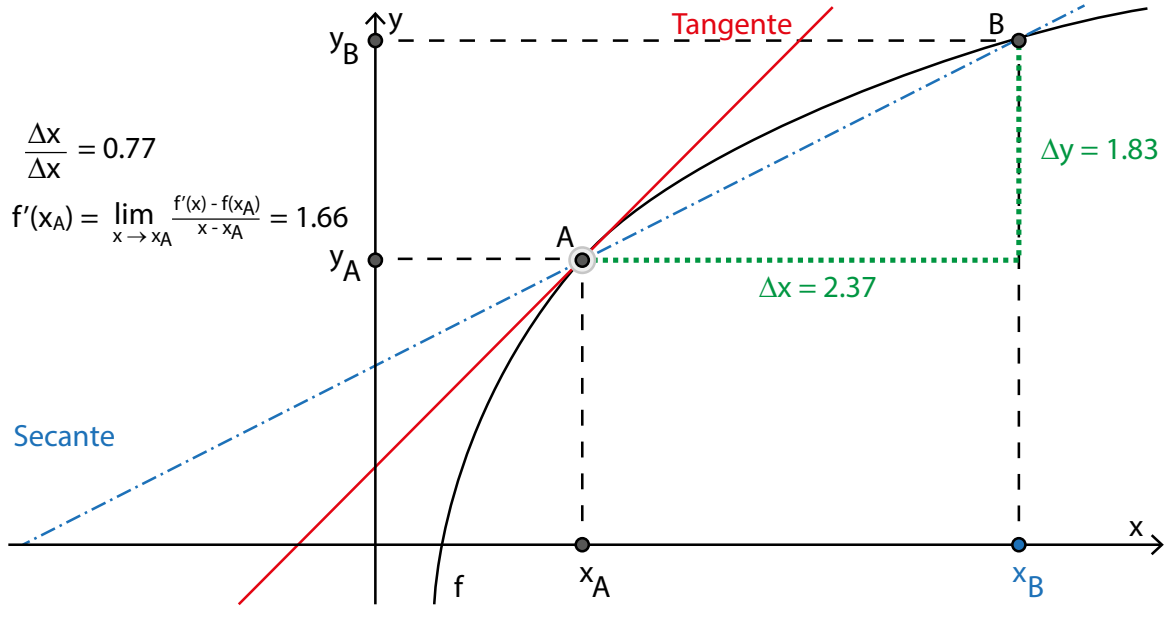


Figura 9 - Interpretação geométrica da derivada / Fonte: Geogebra ([2021], on-line)[2].

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano, de uma função em que o limite, em determinado ponto, corresponde à derivada da função e é indicado pela reta tangente que toca a curva.

Acesse o gráfico dinâmico da representação gráfica anterior pelo QR Code e movimente o ponto A, observando que a reta tangente sempre toca apenas um ponto da curva, que representa a função $f(x)$, enquanto a reta secante toca dois pontos da curva.

Uma função é derivável em um intervalo aberto se houver a derivada em cada ponto dele, logo os limites laterais em determinado ponto precisam ser os mesmos. Uma consequência é que, se a função é derivável, implica que ela seja contínua em todos os pontos em que houver a derivada. Usualmente, não aplicamos a definição para calcular as derivadas, mas, sim, as regras de derivação, que são específicas para cada tipo de função. Vejamos alguns casos dessas regras de derivação. Considere que u e v são funções deriváveis de x e que n é uma constante.

Função	Derivada
$y = u^n$	$y' = n u^{n-1} u'$
$y = u\,v$	$y' = u'v + v'u$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$y = a^u$	$y' = a^u (\ln a)\, u' \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u} u'$
$y = u^v$	$y' = v\, u^{v-1}\, u' + u^v (\ln u)\, v'$
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \sec^2 u$

Quadro 5 - Regras de derivação / Fonte: a autora.

Nesta unidade, não enfatizaremos as operações de cálculo envolvendo as derivadas, apenas as conceituaremos e conheceremos suas aplicações.

Para expandir os conceitos sobre limites e derivadas para os diferentes tipos de funções e conhecer a diversidade de situações em que podem ser aplicados, você poderá acessar o material disponível no QR Code e estudar os exemplos disponibilizados.

Vejamos alguns exemplos da aplicação de derivadas.

a) Função polinomial:

$$y = x^4 + 9x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 + 9x)$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x^{4-1} + 9x^{1-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 9$$

De forma simplificada:

$$y = x^4 + 9x$$
$$y' = 4x^3 + 9$$

b) Função polinomial:

$$y = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 3x + 5$$
$$y' = 3x^2 + \frac{2}{3} \cdot 2x - 3 + 0$$
$$y' = 3x^2 + \frac{4}{3}x - 3$$

c) Derivada do produto:

$$y = (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 2)$$
$$y' = (x^2 + 1) \cdot (3x^2) + (2x) \cdot (x^3 + 2)$$
$$y' = 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 4x$$
$$y' = 5x^4 + 3x^2 + 4x$$

Em uma função já derivável, pode-se aplicar novamente a derivada, a qual denominamos derivada de segunda ordem. Se for possível continuar o processo, teremos derivadas de ordem superior. Podemos interpretar a segunda derivada como a taxa de variação do coeficiente angular da reta tangente à curva. Retomando os exemplos anteriores, aplicaremos a derivada de segunda ordem.

a) Função polinomial:

$$y = x^4 + 9x$$
$$y' = 4x^3 + 9$$
$$y'' = 3 \cdot 4x^2 = 12x^2$$

b) Função polinomial:

$$y = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 3x + 5$$
$$y' = 3x^2 + \frac{4}{3}x - 3$$
$$y'' = 2 \cdot 3x + \frac{4}{3} - 0 = 6x + \frac{4}{3}$$

c) Derivada do produto:

$$y = (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 2)$$
$$y' = 5x^4 + 3x^2 + 4x$$
$$y'' = 4 \cdot 5x^3 + 2 \cdot 3x + 4 = 20x^3 + 6x + 4$$

De acordo com Thomas *et al*. (2002), a aplicação de derivadas em outras áreas gera nomenclaturas diferenciadas. Nas Engenharias, as derivadas de funções são associadas aos termos velocidade e aceleração, que descrevem movimento, sendo a velocidade instantânea obtida na derivada de primeira ordem, e a aceleração, na derivada de segunda ordem. Já na Economia, as taxas de variação e derivadas são denominadas marginais, sendo empregados termos como custo marginal, por exemplo.

Outra aplicação se refere à sensibilidade à variação, que ocorre quando uma pequena variação em x provoca uma grande mudança no valor de $f(x)$. Indicamos, então, que a função é relativamente sensível à variação em x, ou seja, a derivada $f'(x)$ é uma medida dessa sensibilidade.

Muitos fenômenos naturais, como campos eletromagnéticos, ritmo cardíaco, marés, tempo, são periódicos, descritos por funções trigonométricas. As derivadas aplicadas a esses fenômenos desempenam um papel fundamental na descrição de mudanças periódicas. Vejamos exemplos de derivadas envolvendo funções trigonométricas.

a) Função envolvendo polinômio e o seno:

$$y = x^3 + sen\ (x)$$
$$y' = 3x^2 + \cos\ (x)$$

b) Função envolvendo exponencial e o cosseno:

$$y = 5e^x + \cos\ (x)$$
$$y' = 5e^x - sen\ (x)$$

Um exemplo de funções que podem ser descritas por funções trigonométricas é o movimento harmônico simples. O movimento de um corpo, oscilando livremente para cima e para baixo na ponta de uma mola ou corda elástica, é um exemplo desse movimento. Vejamos a ilustração a seguir.

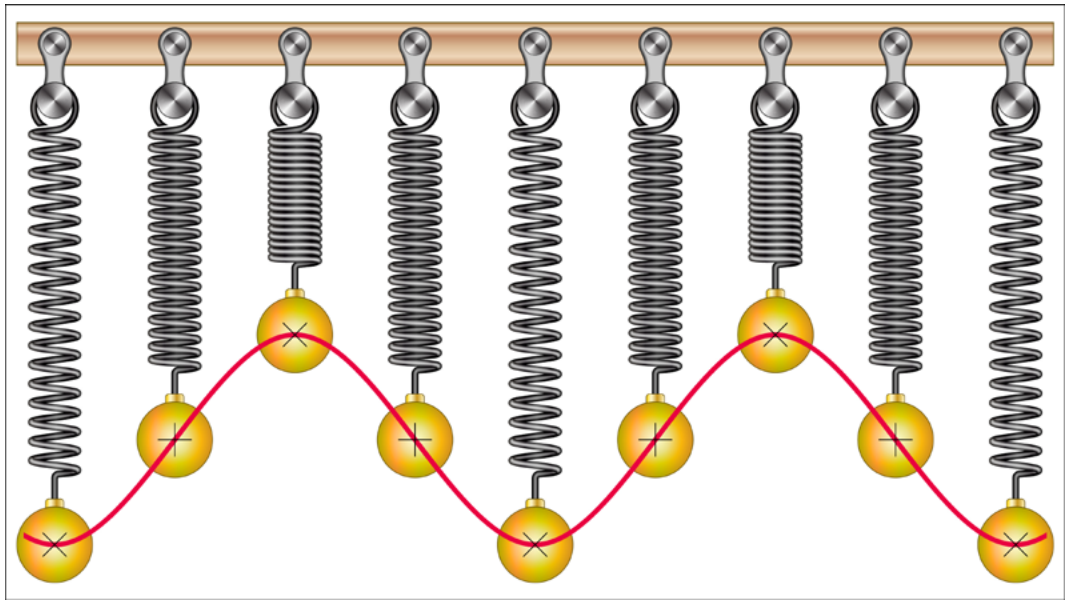


Figura 10 - Representação de um movimento harmônico simples

Descrição da Imagem: representação do movimento periódico de molas, colocadas lado a lado, em que se aplica o movimento harmônico simples, formando uma curva trigonométrica.

Participe da discussão sobre limites e derivadas e suas aplicações em outras áreas do conhecimento, como Física e Engenharias. Aperte o play, e vamos juntos!

Com base no exposto, vimos as principais características de funções, limites, continuidade e derivadas.

Os conteúdos abordados nesta unidade são alguns casos de funções, limites, continuidade e derivadas. Para estudar mais casos e exemplos, utilize os materiais complementares indicados a seguir: *Cálculo aplicado: curso rápido,* de Larson (2011)*; Cálculo,* de Stewart (2011); *Cálculo,* de Thomas, Weir e Hass (2012); e *Cálculo,* de Thomas *et al*. (2002).

Voltando ao nosso exemplo da demolição, imagine que, em uma demolição predial hipotética, você precisou analisar a explosão de uma carga de dinamite, a qual lançou uma pedra pesada para cima. Com uma velocidade de lançamento de 160 pés/s, a pedra atinge uma altura de $s = 160t - 16t^2$ pés após t segundos (THOMAS *et al*., 2002). A trajetória é representada pelo gráfico a seguir:

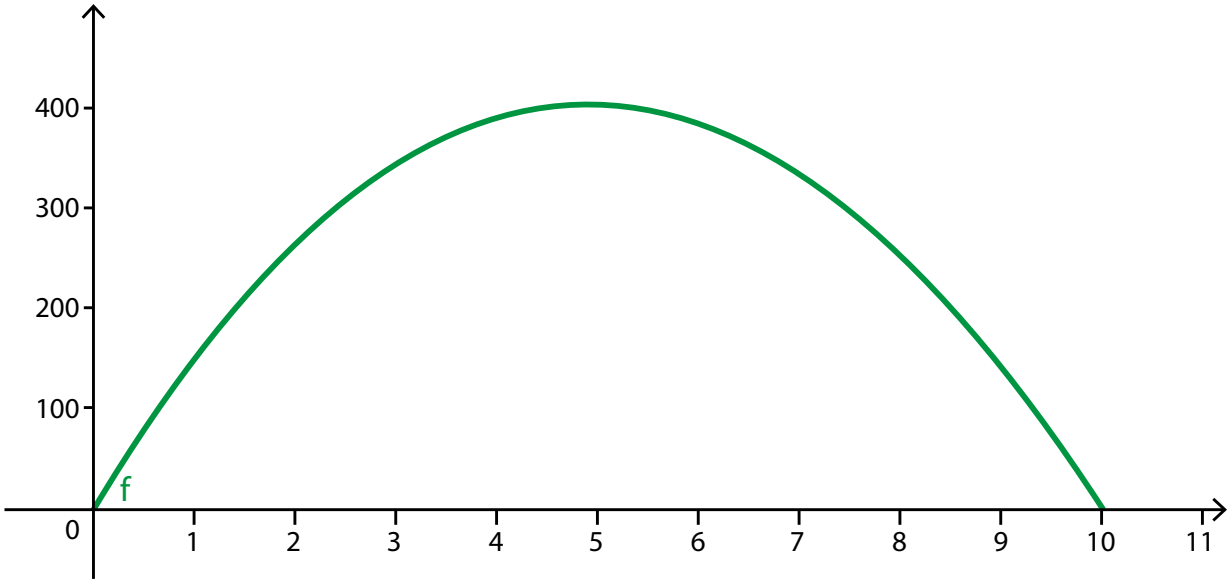


Figura 11 - Representação da função afim $s = 160t - 16t^2$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: representação da trajetória da pedra, que se comporta como uma parábola com a concavidade para cima.

Com relação a isso, elaboraram-se as seguintes questões:

a) Qual é a altura máxima atingida pela pedra?
b) Qual é a velocidade e o módulo da velocidade da pedra quando ela está a 256 pés do solo na subida? E na descida?
c) Qual é a aceleração da pedra em qualquer instante t, durante sua trajetória, após a explosão?
d) Quando a pedra atingirá o solo novamente?

Considerando que a unidade pés/s é uma unidade de medida inglesa, aplicada na equação de queda livre para a terra, podemos resolver as questões propostas da seguinte forma:

a) No sistema de coordenadas que escolhemos, s mede a altura acima do solo, então, a velocidade é positiva para cima e negativa para baixo. O instante em que a pedra está no ponto mais alto é aquele em que sua velocidade é nula. Para encontrar sua altura máxima, precisamos calcular quando $v = 0$ e avaliar s nesse momento. Em qualquer instante t, a velocidade é:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\left(160t - 16t^2\right) = 160 - 32t \text{ pés/s}$$

A velocidade é nula quando:

$$\begin{aligned} 160 - 32t &= 0 \\ -32t &= -160 \\ t &= \frac{160}{32} \\ t &= 5 \text{ s} \end{aligned}$$

Analisando no gráfico, verificamos que o vértice da parábola que descreve a trajetória da pedra ocorre para $t = 5$. Substituindo na função, obtemos a altura máxima:

$$s_{máx} = s(5) = 160 \cdot 5 - 16 \cdot 5^2 = 800 - 400 = 400 \text{ pés}.$$

b) Para calcular a velocidade da pedra a 256 pés na subida e, depois, na descida, primeiramente, denominamos os dois valores de t, para os quais:

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256$$

Para resolver essa equação, realizamos a manipulação algébrica, de modo que:

$$-16t^2+160t-256=0$$

Assim, podemos aplicar a fórmula de resolução de equação de segundo grau, adotando $a=-16,\ b=160$ e $c=-256$.

Aplicando a primeira parte da fórmula de resolução:

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = 160^2-4\cdot(-16)\cdot(-256)$$
$$\Delta = 25600-16384$$
$$\Delta = 9216$$

Aplicando a segunda parte da fórmula de resolução:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$t=\frac{-160\pm\sqrt{9216}}{2.(-16)}$$
$$t_1=\frac{-160+96}{-32}=\frac{64}{32}=2$$
$$t_2=\frac{-160-96}{-32}=\frac{256}{32}=8$$

A pedra está a 256 pés acima do solo $2\ s$ após a explosão e, novamente, $8\ s$ após a explosão. Suas velocidades nesses instantes são:

$$v(2) = 160 - 32 \cdot (2) = 160 - 64 = 96 \text{ pés/s}$$

$$v(8) = 160 - 32 \cdot (8) = 160 - 256 = -96 \text{ pés/s}$$

Nos dois instantes, a velocidade da pedra é igual a $96\ pés / s$.

a) Em qualquer instante durante a trajetória, depois da explosão, a aceleração da pedra é uma constante:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(160 - 32t) = -32 \text{ pés/s}^2$$

A aceleração é sempre dirigida para baixo. Quando a pedra sobe, ela freia; quando ela cai, ela acelera.

b) A pedra atinge o solo no instante positivo para t, no qual $s = 0$. A equação $160t - 16t^2 = 0$ se decompõe nos fatores $16t(10 - t) = 0$, apresentando as soluções $t = 0$ e $t = 10$. No instante $t = 0$, houve a explosão, e a pedra foi jogada para cima, ela retornou ao solo $10\ s$ após.

A partir do termo central “função”, podemos produzir um mapa mental estabelecendo relações com tipos de funções, limites, continuidade e derivadas, conforme o exemplo ilustrado a seguir.

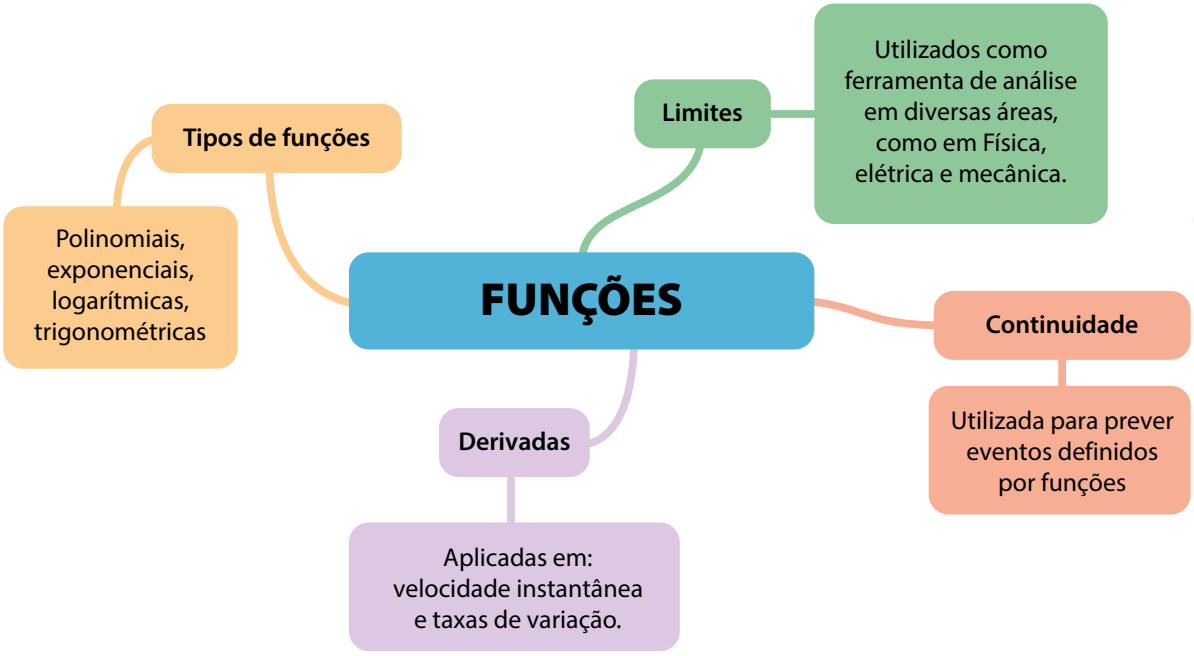


Figura 12 - Mapa mental sobre funções, limites, continuidade e derivadas / Fonte: a autora.

Tendo como base o exemplo, desenvolva o seu próprio mapa mental, resumindo todos os conteúdos vistos na unidade.

MAPA MENTAL

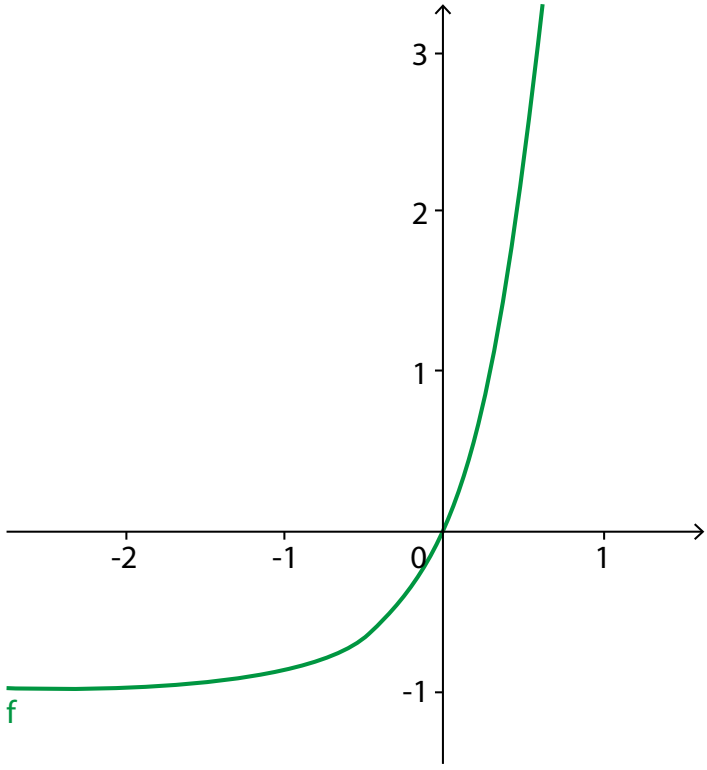
1. As funções associam duas grandezas em que uma representa a variável independente e a outra representa a variável dependente. Dadas as seguintes funções, utilize o geogebra.org e construa os respectivos gráficos. Depois, analise se formam ou não funções e suas principais características.

   a) $y = -x$

   b) $y = 1 + x^2$

   c) $x = y$

2. Considere a função, definida por $f : R \to R$, $f(x) = 10^x - 1$, cuja representação gráfica é dada por:



Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: desenho da função $f(x) = 10^x - 1$, que possui um comportamento exponencial, é crescente e passa pela origem, iniciando-se no terceiro quadrante e se direcionando para o primeiro quadrante.

Com base nisso, julgue as sentenças a seguir como verdadeiras (V) ou falsas (F).

I) A função pode ser caracterizada como uma função logarítmica.

II) Para $x = 0$, os limites laterais à direita e à esquerda tendem a zero, logo o limite existe.

III) Considerando o intervalo para $-1 < x < 1$, a função é contínua.

Assinale a alternativa que corresponde, respectivamente, ao julgamento das sentenças.

a) F, F, V.

b) V, F, F.

c) F, V, F.

d) V, V, F.

e) F, V, V.

3. Os conceitos aplicados a limites e derivadas possuem diversas aplicações em situações práticas em áreas como a Física, Engenharias, entre outras. Com base nesses conceitos, analise as afirmações a seguir.

I) Ao aplicarmos o limite em uma reta secante a uma curva, obteremos a reta tangente à curva, que é a representação geométrica da derivada.

II) Ao aplicar a derivada de primeira ordem em um função que descreve um movimento, o resultado pode ser associado com a aceleração.

III) Em uma função, é possível aplicar derivadas de segunda ordem e de ordens superiores.

Assinale a alternativa que corresponde ao julgamento das afirmações.

a) Apenas II e III são corretas.

b) Apenas I e II são corretas.

c) Apenas I e III são corretas.

d) Apenas II é correta.

e) Apenas III é correta.

4 Noções de integração: cálculo de áreas e volumes

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, abordaremos a obtenção de medidas de superfícies e volumes. Para isso, teremos o auxílio de subáreas da Matemática, como a Geometria, a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral. Iniciaremos pelos cálculos mais elementares de áreas de figuras planas, posteriormente, exploraremos as diferentes representações dos sólidos geométricos e realizaremos os cálculos pré-definidos de prismas, dando destaque para os casos particulares de paralelepípedos e cubos, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Exploraremos os sólidos obtidos por meio de revolução, os quais geram formas como as quádricas: paraboloide, elipsoide, hiperboloide, entre outras. Além disso, teremos outras formas espaciais obtidas por meio de funções de múltiplas variáveis, das quais podemos calcular as medidas de áreas de superfície e volumes por meio do procedimento de integração. Nosso objetivo é conhecer os conceitos, as representações geométricas e o método de obtenção das medidas. Bons estudos!

Existem construções de edificações que fogem dos padrões usuais de obras arquitetônicas e civis e requerem técnicas específicas e cálculos aprimorados para viabilizar a sua construção. Analisemos alguns exemplos:

O Teatro Nacional de Pequim é um exemplo de construção que foi inspirada em uma forma elipsoidal, isso significa que, quando passamos um corte transversal ou longitudinal, o contorno é formado por uma elipse.

O Edifício Gerkin, localizado em Londres, foi inspirado em uma forma espacial curva que denominamos paraboloide. Nesse caso, ao realizarmos os cortes transversal ou longitudinal, obteremos o contorno de uma parábola.

O edifício Aldar, em Abu Dhabi, foi inspirado em cunhas esféricas, que são partes de esferas. Por ser uma construção inusitada, exigiu inovações tecnológicas para a sua criação.

Você já pensou em como calcular áreas de superfície e volumes de edifícios de formas elípticas, parabólicas e/ou esféricas?

Podemos calcular as áreas de superfícies e volumes de formas espaciais a partir dos conceitos da Geometria e com o suporte do Cálculo Diferencial e Integral. Quando temos formas pré-definidas e já estabelecidas por fórmulas específicas, provadas no campo da Geometria, como para casos como cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones, entre outros, aplicamos as respectivas fórmulas e obtemos esse resultado. Quando temos formas diferenciadas, utilizamos, por exemplo, as equações quádricas, definidas pela Geometria Analítica, e o processo de integração envolvendo funções de múltiplas variáveis para calcular essas dimensões.

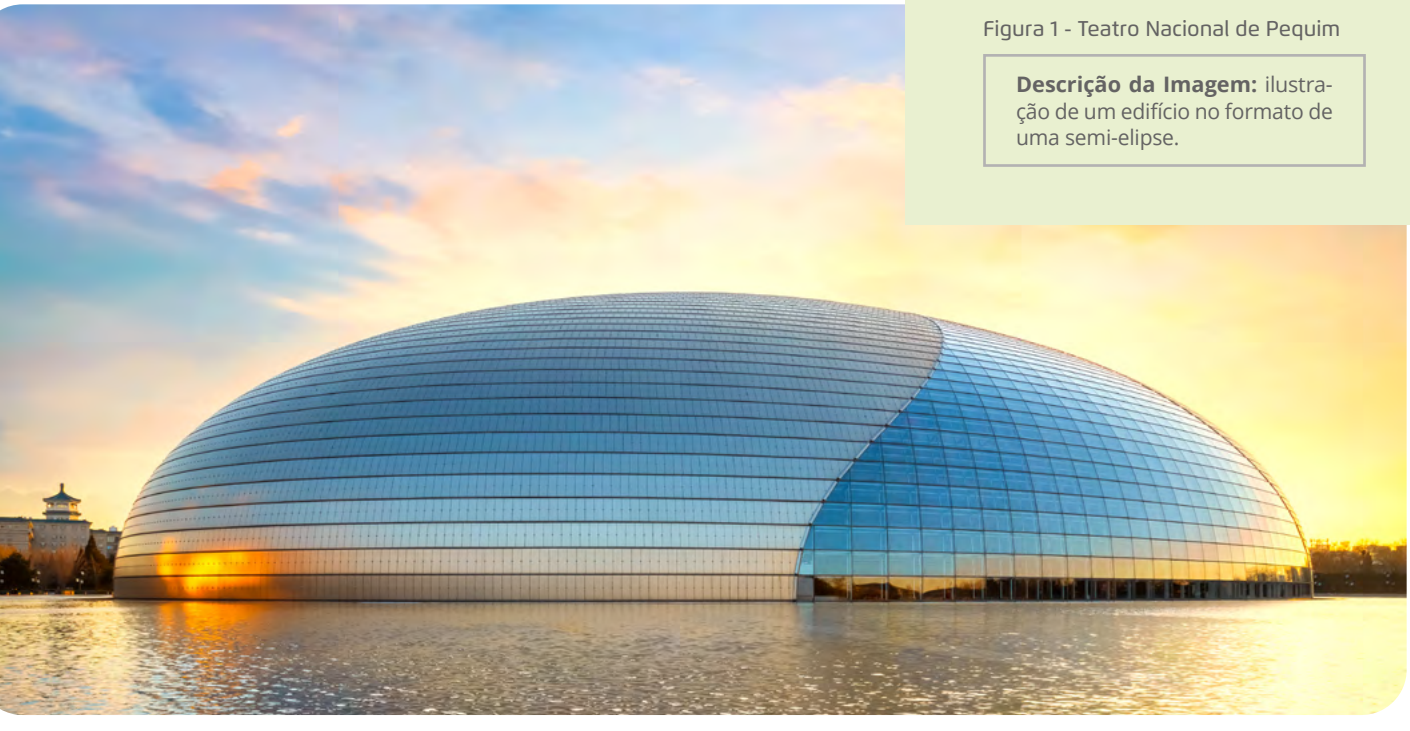


Figura 1 - Teatro Nacional de Pequim

Descrição da Imagem: ilustração de um edifício no formato de uma semi-elipse.

Figura 2 - Edifício Gerkin, em Londres

Descrição da Imagem: ilustração de um edifício no formato de um paraboloide.

Figura 3 - Edifício Aldar, em Abu Dhabi

Descrição da Imagem: ilustração de um edifício no formato esférico.

> As maiores pirâmides egípcias são conhecidas pelo nome de 'Pirâmides de Gizé' e estão situadas [às] margens do Nilo. A maior e mais antiga é a de Quéops, que tem a forma aproximada de uma pirâmide de base quadrada com 230 metros de lado e faces laterais que se aproximam de triângulos equiláteros (UEL, 2014, on-line)[1].

Vejamos a imagem a seguir:

Figura 4 - Complexo de Gizé

Descrição da Imagem: ilustração das pirâmides que compõem o complexo de Gizé.

Em Matemática, pirâmide é um sólido geométrico. Você sabe como calcular o volume de edificações com as dimensões como as da pirâmide do complexo de Gizé?

Para apresentarmos os conceitos relacionados ao cálculo de áreas e volumes de sólidos, abordaremos conceitos da Geometria, que é a base para a análise da forma e do espaço. Ela é um ramo da Matemática que estuda a respeito das propriedades e dimensões de objetos relacionadas à linha, à superfície e ao volume. Desse modo, precisamos conhecer sobre superfícies, sólidos e suas relações para aprender os tópicos dessa unidade. Os elementos primitivos são ponto, reta e plano, e, a partir deles, definimos todos os elementos.

Faça um apanhado dos conteúdos que você lembra que podem ajudá-lo(a) a calcular as dimensões das edificações projetadas por você e anote no seu Diário de Bordo.

DIÁRIO DE BORDO

Com relação ao espaço, consideramos o conjunto de todos os pontos em uma região tridimensional (3D), sendo que, dados dois pontos quaisquer do espaço, há uma infinidade de pontos entre eles. Quando analisamos o plano, consideramos duas dimensões (2D) e analisamos uma superfície. No caso da reta, temos um objeto unidimensional (1D).

Ao analisar as posições relativas entre retas no espaço, podemos organizar o seguinte organograma:

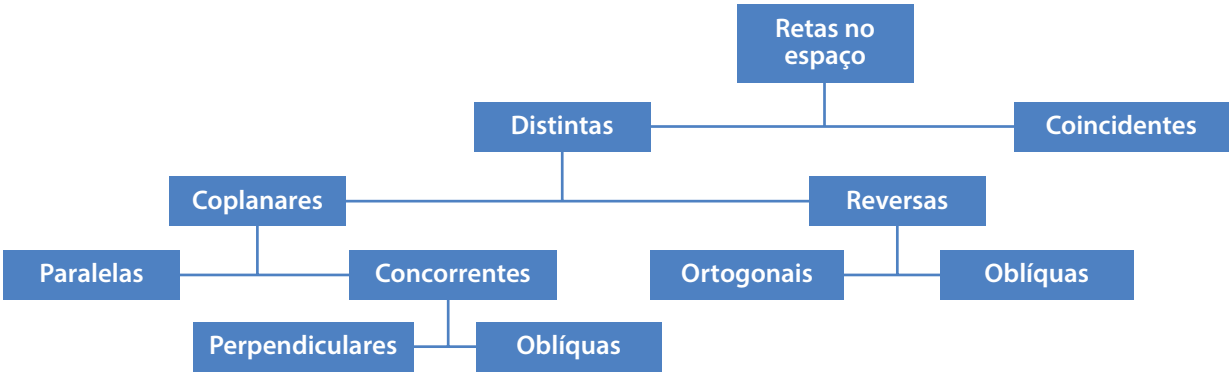


Figura 5 - Organograma das posições relativas entre as retas no espaço / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de organograma indicando as posições de retas no espaço, que são dois tipos: distintas e coincidentes. As distintas podem ser coplanares ou reversas. As coplanares podem ser paralelas ou concorrentes; e as reversas, ortogonais e oblíquas. As concorrentes podem ser perpendiculares ou oblíquas.

Vejamos o exemplo das retas a e b, que são paralelas, representadas no plano e no espaço.

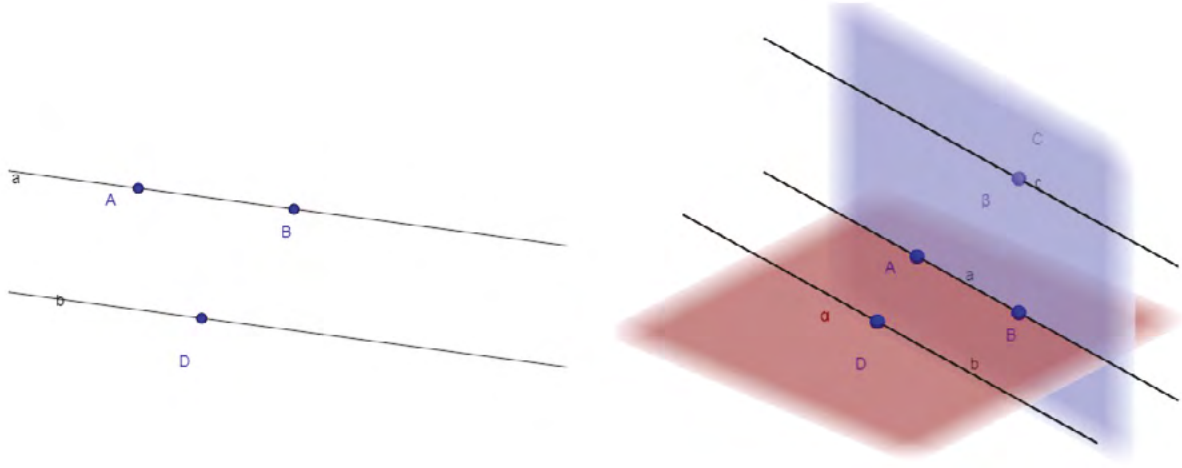


Figura 6 - Retas a e b no plano e no espaço / Fonte: Cássio ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de duas retas a e b paralelas entre si. Encontram-se, primeiramente, no plano, indicado do lado esquerdo, e, do lado direito, indicadas no espaço.

Ao analisarmos uma reta e um plano no espaço, podemos obter as seguintes possibilidades:

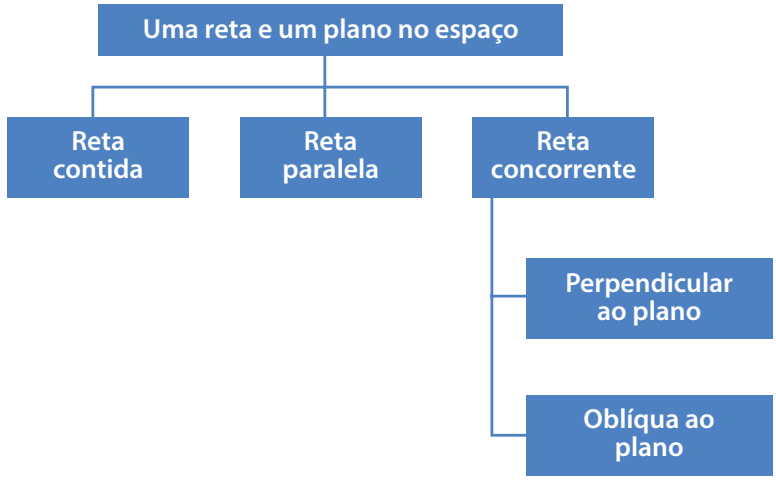


Figura 7 - Organograma das posições relativas entre um plano e uma reta no espaço / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de organograma indicando as posições de uma reta e um plano no espaço, que pode ser contida, paralela ou concorrente. A concorrente pode ser perpendicular ao plano ou oblíqua ao plano.

Se considerarmos dois planos no espaço, podemos ter os seguintes casos:

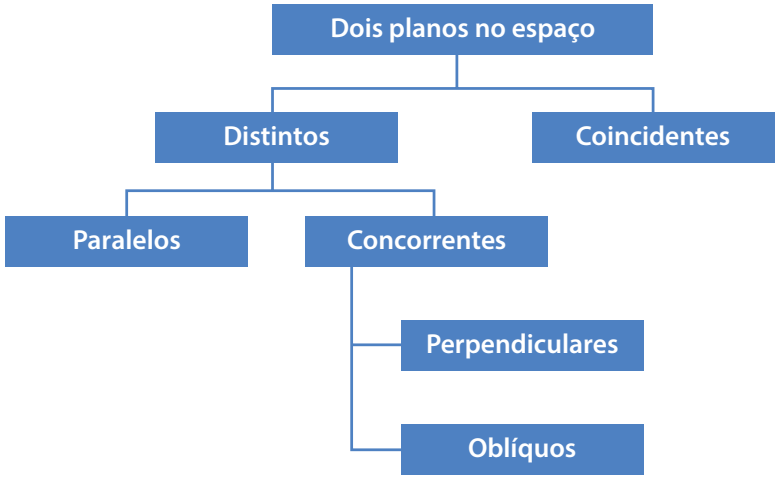


Figura 8 - Organograma das posições relativas a dois planos no espaço / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de organograma indicando as posições de dois planos no espaço, que podem ser distintos ou coincidentes. Os distintos podem ser paralelos ou concorrentes, e os concorrentes podem ser perpendiculares ou oblíquos.

Além de analisarmos os elementos fundamentais no espaço, precisamos compreender os objetos que compõem as superfícies, as quais são representadas no plano. Dentre as superfícies, temos, por exemplo, polígonos e círculos. Iniciamos ao trazer as principais considerações sobre polígonos a partir da definição a seguir.

São formados por uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada com n lados.

Os não polígonos são formados por partes curvas ou que possuem pontos de intersecção na construção da linha poligonal. Um polígono é convexo quando traçamos um segmento de reta que una dois pontos quaisquer de sua região interna e que esteja sempre contido nesse polígono. Caso contrário, temos um polígono que é classificado como não convexo ou côncavo, além disso, se o polígono possuir todos os lados com medidas iguais — ou seja, congruentes — e todos os ângulos congruentes, denominamos polígono regular. Vejamos o diagrama a seguir com a ilustração de polígonos e a identificação dos casos tidos como regulares.

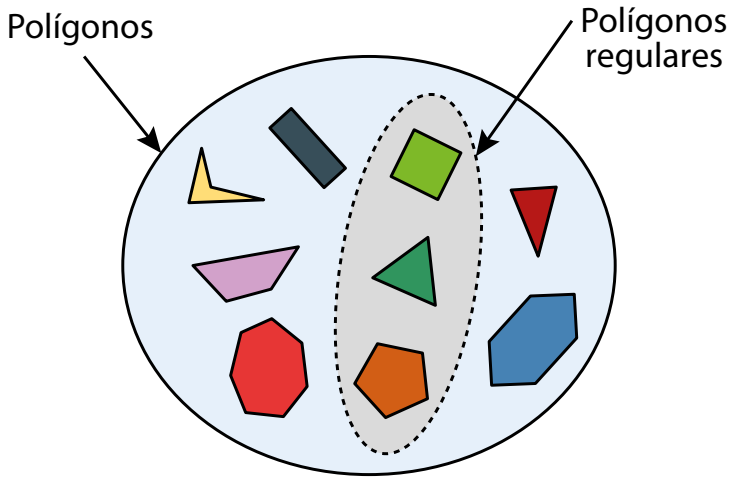


Figura 9 - Diagrama de polígonos e o subconjunto de polígonos regulares / Fonte: Wikimedia Commons (2011, on-line).

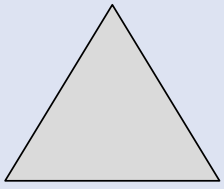
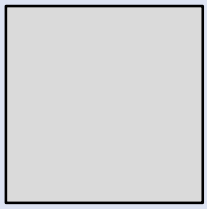
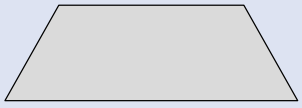
Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama de polígonos e o subconjunto de polígonos regulares, como, por exemplo, um triângulo equilátero e um quadrado.

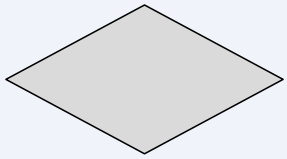
Em relação à nomenclatura, os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados. Vejamos a indicação no quadro a seguir.

Número de lados	Nomenclatura
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
20	Icoságono

Quadro 1 - Nomenclatura dos polígonos / Fonte: a autora.

Para o cálculo de áreas de polígonos, utilizamos uma unidade (u) de referência e medimos quantas unidades ocupam a superfície. Apresentamos um quadro-resumo dos principais polígonos.

Polígono	Área da superfície	Exemplo
Triângulo 	$A_{\triangle} = \frac{base \cdot altura}{2}$ $A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$	$b = 4\ u$ $h = 3\ u$ $A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$ $A_{\triangle} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\ u.a.$
Retângulo	$A_{\square} = \text{base} \times \text{altura}$ $A_{\square} = b \cdot h$ $A_{\square} = \text{comprimento} \times \text{largura}$ $A_{\square} = c \cdot l$	$c = 5\ u$ $l = 3\ u$ $A_{\square} = c \cdot l$ $A_{\square} = 5 \cdot 3 = 15\ u.a$
Quadrado 	$A_{\square} = lado \cdot lado$ $A_{\square} = l \cdot l = l \square$	$l = 5\ u$ $A_{\square} = l \cdot l = l^2$ $A_{\square} = 5^2 = 25\ u.a.$
Paralelogramo	$A_{\square} = \text{base} \times \text{altura}$ $A_{\square} = b \cdot h$	$b = 8\ u$ $h = 3\ u$ $A_{\square} = b \cdot h$ $A_{\square} = 8 \cdot 3 = 24\ u.a$
Trapézio 	$A_T = \frac{(base\ maior + base\ menor) \cdot altura}{2}$ $A_T = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$	$B = 5\ u$ $b = 3\ u$ $h = 2,5\ u$ $A_T = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ $A_T = \frac{(5+3) \cdot 2,5}{2} = 10\ u.a$

Polígono	Área da superfície	Exemplo
Losango 	$A_L = \frac{Diagonal\ maior \cdot diagonal\ menor}{2}$ $A_L = \frac{D \cdot d}{2}$	$D = 5\ u$ $d = 3\ u$ $A_L = \frac{D \cdot d}{2}$ $A_L = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5\ u.a$

Quadro 2 - Casos de áreas dos polígonos Fonte: a autora.

Dentre os polígonos, podemos destacar os triângulos e quadriláteros. Neles, são definidos elementos específicos, além do cálculo das áreas de suas superfícies. Para estudar esses conceitos, acesse o QR Code que o direcionará a uma página do GeoGebra; nela, você encontrará uma página com os seguintes tópicos:

- Quadrilátero: noções iniciais.
- Quadriláteros notáveis: trapézio; paralelogramo; retângulo; losango; quadrado.
- Bases médias: base média do triângulo; base média do trapézio.
- Área do triângulo e dos quadriláteros notáveis: área do retângulo; área do quadrado; área do paralelogramo; área do triângulo; área do trapézio; área do losango.

Acesse cada um desses links e estude os principais elementos da Geometria Plana por meio de representações e utilizando um software dinâmico.

Quando consideramos as formas espaciais, precisamos conhecer o conceito a respeito de sólidos geométricos. Podemos defini-los da seguinte forma:

Um sólido geométrico é uma região do espaço limitada por uma superfície fechada.

Ao classificarmos os sólidos geométricos, eles são divididos em dois grupos: os poliedros e os não poliedros. Vejamos os exemplos de formas consideradas poliédricas.

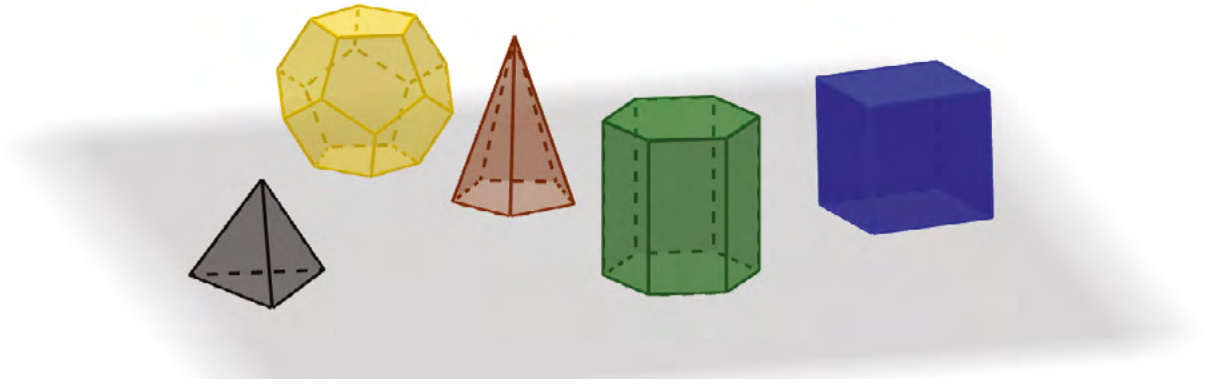


Figura 10 - Exemplos de sólidos geométricos poliédricos / Fonte: Neto e Cássio ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de sólidos geométricos composta por pirâmides, prismas e sólidos de Platão.

Com relação aos não poliédricos, temos os que são identificados como corpos redondos, ou seja, cone, cilindro e esfera, e temos os que possuem partes mistas entre curvas e superfícies planas, ou sólidos de revolução, que são gerados por meio de objetos e de funções. Vejamos os exemplos:

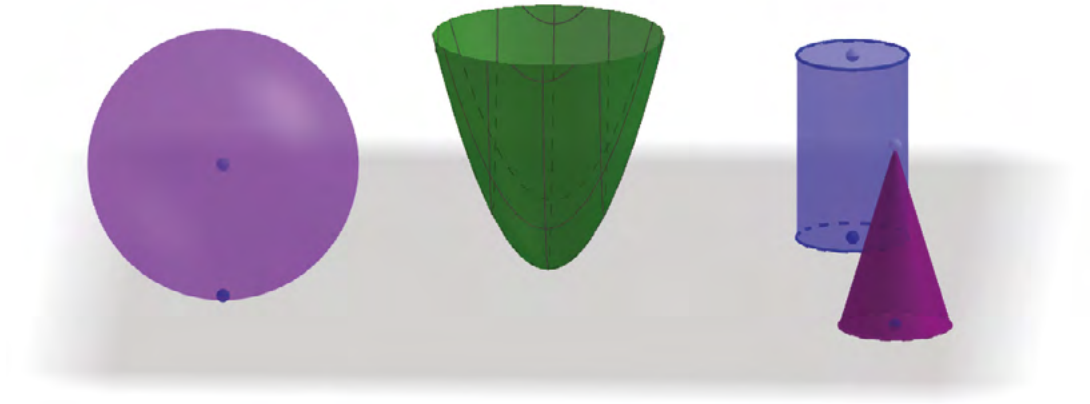


Figura 11 - Exemplos de sólidos geométricos não poliédricos / Fonte: Neto e Cássio ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de sólidos geométricos composta por esfera, paraboloide, cilindro e cone.

Nosso objetivo é definir os entes geométricos e calcular as suas respectivas superfícies e volumes. Para isso, abordaremos, inicialmente, os poliedros para, posteriormente, diferenciá-los dos não poliedros. Começamos ao apresentar a definição de poliedro:

Trata-se de um sólido geométrico limitado só por superfícies planas.

Em um poliedro, podemos analisar as faces, os vértices e as arestas, de modo que são indicados da seguinte forma:

a) **Aresta**: é a intersecção de dois planos, isto é, é a união de dois lados consecutivos de um poliedro.
b) **Vértice**: lugar em que se encontram as arestas, isto é, um ponto em comum entre lados consecutivos de uma figura geométrica.
c) **Face**: constituída por um polígono qualquer.

Vejamos a ilustração desses elementos a seguir:

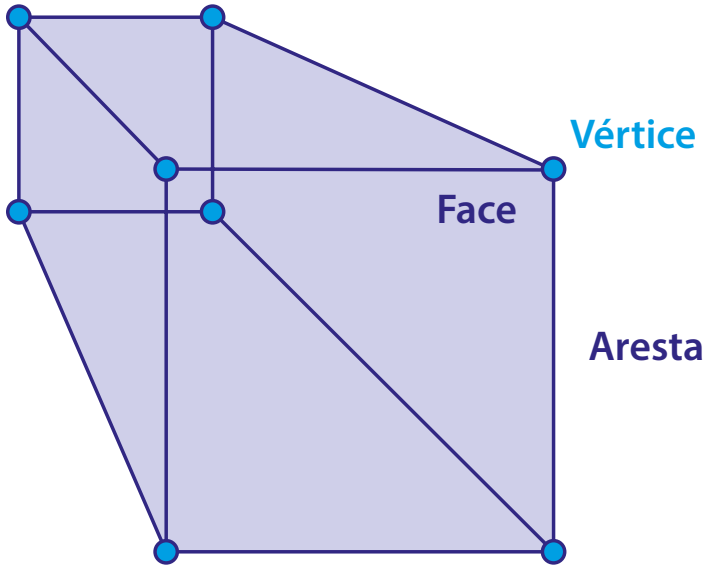


Figura 12 - Elementos do poliedro / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[2].

Descrição da Imagem: representação de um paralelepípedo reto com indicação da vista frontal como face, do encontro da vista frontal com a vista lateral direita como aresta, e o ponto de encontro das três faces como vértice.

Quando analisamos dois poliedros, podemos afirmar que eles têm dimensões iguais — ou seja, se são congruentes — se, e somente se, for possível estabelecer correspondências entre seus elementos, de maneira que as faces e os ângulos de um poliedro sejam congruentes ao do outro. Também, podemos analisar se um poliedro é classificado como convexo ou como não convexo ou côncavo, conforme a definição a seguir.

Se cada plano que possui uma face de um poliedro dispõe das outras faces em um mesmo semiespaço, então, o poliedro é convexo; se não, é não convexo (ou côncavo).

Também, podemos definir poliedros convexos como aqueles que são seccionados por uma reta em apenas duas de suas faces, assim, constituídos por todos os seus vértices posicionados de modo que estejam voltados para fora. Caso isso não ocorra, teremos um poliedro não convexo ou côncavo, ou seja, haverá vértices direcionados para o interior do sólido.

Quando temos uma superfície poliédrica convexa, temos um número finito de polígonos planos e convexos, de modo que:

a) Dois polígonos não estão no mesmo plano.
b) Cada lado do polígono não está em mais do que dois polígonos.
c) Em um polígono, seus lados precisam formar uma única linha poligonal fechada, denominada contorno.
d) O plano de cada polígono possibilita que os outros planos estejam em um mesmo semiespaço.

Quando um poliedro é formado por um único tipo de face poligonal regular, temos um poliedro regular. Dessa forma, as faces dele possuem todos os lados e os ângulos internos congruentes. Em relação à nomenclatura, os poliedros são classificados pelo número de faces. Vejamos o quadro a seguir.

Número de faces	Nomenclatura
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
⋮	⋮
20	Icosaedro

Quadro 3 - Nomenclatura dos poliedros / Fonte: a autora.

Destacamos as contribuições de Leonhard Euler para os estudos dos poliedros.

Figura 13 - Leonhard Euler

Descrição da Imagem: ilustração de um selo com a imagem, dados e contribuições de Leonhard Euler.

Esse matemático comprovou a validade existente da relação entre vértices (V), faces (F) e arestas (A), de modo que:

$$V + F = A + 2$$

Que ficou conhecida como a Relação de Euler e é utilizada dentro dos estudos de poliedros.

Dentre os poliedros, temos um subconjunto denominado Sólidos de Platão. Eles atendem às seguintes condições:

a) Suas faces possuem o mesmo número inteiro de arestas.
b) Os seus vértices concorrem o mesmo número inteiro de arestas.
c) São convexos e satisfazem a Relação de Euler.

Vejamos uma ilustração de sólidos que possuem essas condições.

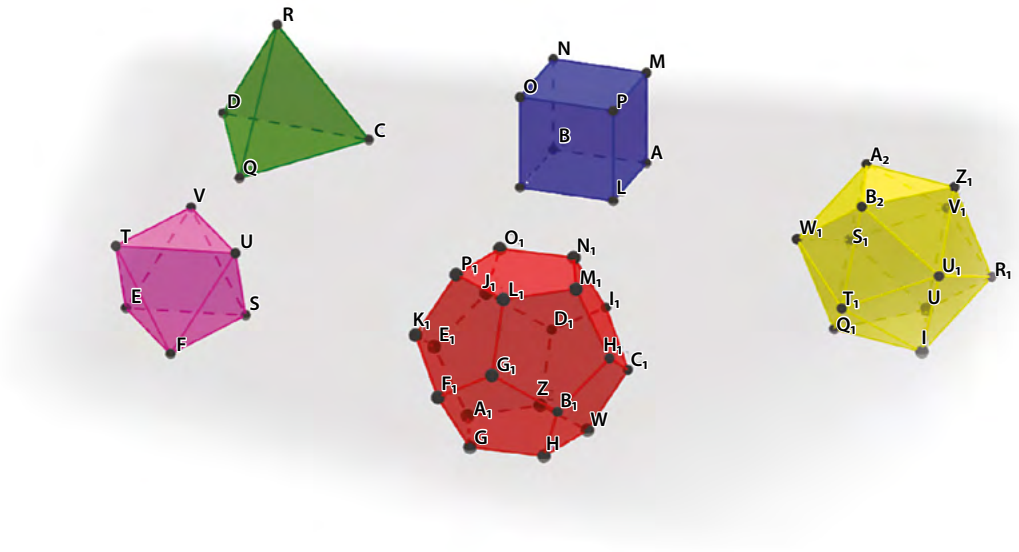


Figura 14 - Sólidos de Platão / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[3].

Descrição da Imagem: ilustração de cinco sólidos de Platão composta pelo tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro, todos regulares.

Além do exposto anteriormente, a superfície de um poliedro pode ser projetada sobre um plano de modo que cada uma das faces do poliedro possua, pelo menos, um lado em comum com outra face.

No QR Code, acesse a imagem a seguir e siga as instruções no enunciado para assistir à animação da planificação do dodecaedro.

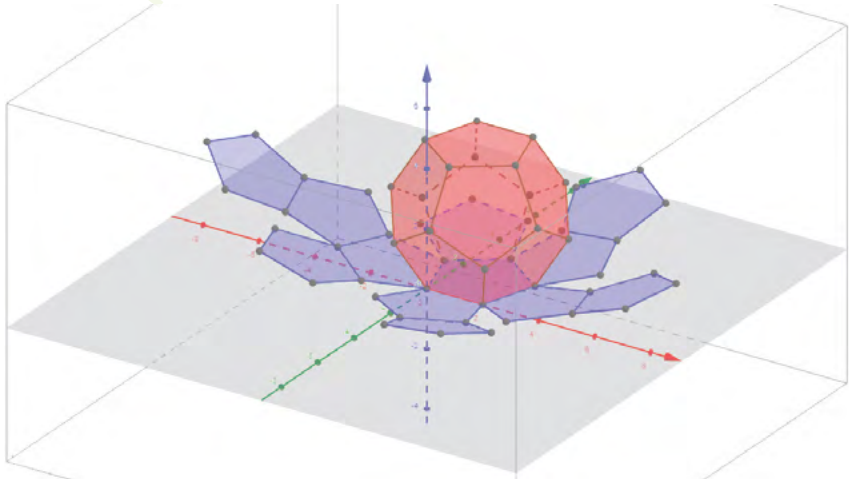


Figura 15 - Planificação do dodecaedro / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)4.

Descrição da imagem: ilustração da planificação do dodecaedro no sistema de coordenadas cartesianas em que está inserido, e as faces se deslocam em direção ao plano horizontal.

Dentre os poliedros, destacamos os prismas e as pirâmides. Iniciaremos ao apresentar os principais conceitos relacionados aos prismas. Vejamos a sua definição:

Adote um polígono convexo ABC, localizado em um plano α, e uma reta r, secante ao plano α. Para cada ponto pertencente ao polígono ABC, existe um segmento de reta partindo do ponto P, paralelo à reta r, que chega, num plano β, em um ponto P'. O conjunto de todos esses segmentos se chama prisma.

Devido à sua definição, a principal característica dos prismas é que suas bases opostas são formadas pelo mesmo polígono, que pode estar na posição oblíqua ou reta, neste último caso, se os polígonos da base forem regulares, teremos que o prisma também será tido como regular. Vejamos a ilustração de alguns casos:

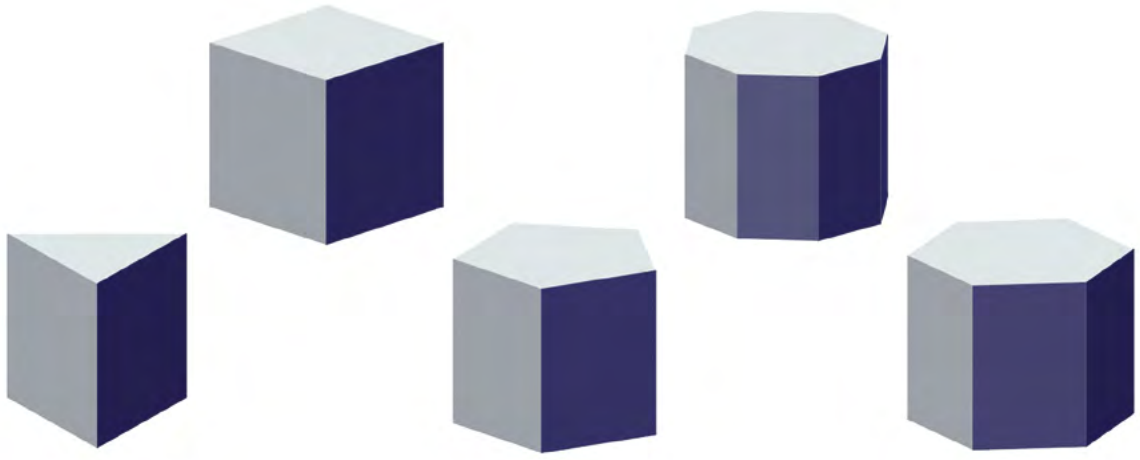


Figura 16 - Prismas regulares / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[5].

Descrição da Imagem: ilustração de prismas de base triangular, quadrangular, pentagonal, hexagonal e heptagonal, todos regulares.

A nomenclatura dos prismas se dá de acordo com o polígono de sua base. No exemplo anterior, os prismas são, respectivamente, um prisma de base triangular, prisma de base quadrangular ou paralelepípedo, prisma de base pentagonal, prisma de base hexagonal e prisma de base heptagonal. Também, podemos realizar a planificação dos prismas projetando os polígonos que constituem sua superfície no plano. Vejamos a ilustração a seguir.

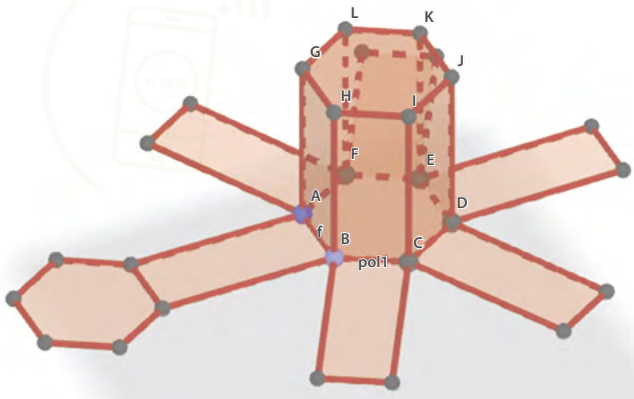


Figura 17 - Planificação do prisma / Fonte: Freitas ([2021], on-line).

Descrição da imagem: ilustração de uma animação que contém prismas de diferentes bases e dimensões sendo planificados.

Acesse o QR Code da imagem anterior e verifique que temos duas janelas de visualização: uma para o polígono de base inserida no plano e outra para o prisma inserido no espaço. Movimente os botões indicados para alterar a base do prisma e suas dimensões. A partir disso, analise suas respectivas planificações.

Podemos calcular as áreas de superfícies e volumes dos prismas. Com relação à área de superfície, é preciso considerar as bases e a área lateral, que podem ser constituídas por paralelogramos, se o prisma for oblíquo, ou de retângulos, se for reto, formando um paralelepípedo, ou de quadrados. Se sua base for quadrada, congruente com as medidas das faces laterais, temos um caso particular de prisma chamado de cubo. A área total é obtida ao analisar a planificação do sólido, de modo que consideramos as áreas das duas bases mais a área lateral para calcular a medida de superfície. Assim, temos:

$$A_t = 2A_b + A_l$$

Em que:

A_t : área total.
A_b : área da base.
A_l : área lateral.

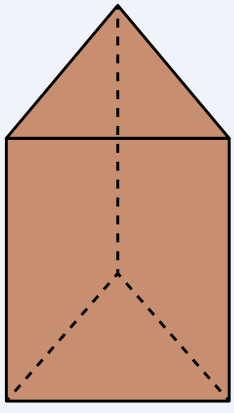
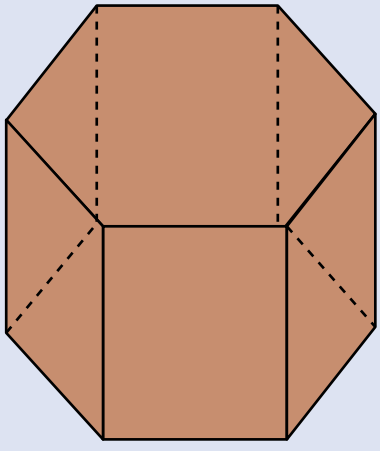
O volume de um prisma é dado por sua medida de capacidade, obtida por meio da relação:

$$V = Ab \cdot h$$

Em que:

V : volume.
A_b : área da base.
h : altura do prisma.

Temos alguns casos particulares para cálculos de áreas de superfícies e volumes de prismas. Devido ao cálculo da área do triângulo equilátero — que é obtida por meio da expressão: $A_{\triangle} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, em que l representa a medida do lado do triângulo —, quando a base do prisma for um triangulo equilátero ou quando a base for um hexágono regular — que pode ser subdividido em seis triângulos equiláteros —, aplicamos as relações a seguir:

Prisma	Área da superfície	Volume
Prisma de base triangular regular 	$A_b = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	$V = A_b \cdot h$ $V = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$
Prisma de base hexagonal regular 	$A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ $A_b = 3 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = A_b \cdot h$ $V = 3 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h$

Quadro 4 - Casos de áreas de superfície e volume de prismas regulares / Fonte: a autora.

Vejamos o seguinte exemplo para um prisma regular de base hexagonal, cuja base possui aresta de 2 cm, e a altura é de 15 cm.

a) A área da base é dada por: $A_b = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}\ cm^2$.

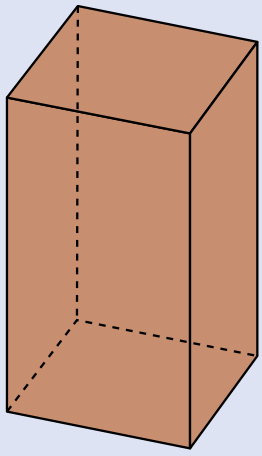
b) A área lateral é dada por: $A_l = 6 \cdot 15 \cdot 2 = 180\ cm^2$.

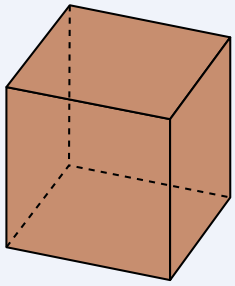
c) A área total é dada por: $A_t = 2 \cdot 6\sqrt{3} + 180 \cong 200,7\ cm^2$.

d) O volume é dado por: $V = A_b \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot 15 \cong 155,9\ cm^3$.

Para explorar outros resultados de cálculos de áreas de superfícies e volumes de prismas, acesse o QR Code. Você encontrará a página a seguir no site do GeoGebra. Analise cada caso disponibilizado e compare as formas de obtenção dos cálculos.

Existem alguns casos particulares de prismas que destacamos devido às suas dimensões e adequamos às fórmulas gerais para que sejam obtidos os resultados do cálculo das áreas de superfície e volumes. Vejamos o quadro a seguir:

Prisma	Área da superfície	Volume	Diagonal
Paralelepípedo  $c = comprimento$ $l = largura$ $h = altura$ Exemplo: $c = 5\ u$ $l = 4\ u$ $h = 3\ u$	$A_t = 2(c \cdot l + c \cdot h + l \cdot h)$ Exemplo: $A_t = 2 \cdot (5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3)$ $A_t = 2 \cdot (20 + 15 + 12)$ $A_t = 2 \cdot 47$ $A_t = 94\ u.a$	$V = c \cdot l \cdot h$ Exemplo: $V = 5 \cdot 4 \cdot 3$ $V = 60\ u.v$	$d = \sqrt{c^2 + l^2 + h^2}$ Exemplo: $d = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$ $d = \sqrt{25 + 16 + 9}$ $d = \sqrt{50}$ $d = 5\sqrt{2}\ u$

Prisma	Área da superfície	Volume	Diagonal
Cubo  $a =$ aresta Exemplo: $a = 2\ u$	$A_t = 6 \cdot a^2$ Exemplo: $A_t = 6 \cdot 2^2$ $A_t = 24\ u.a$	$V = a$ Exemplo: $V = 2^3$ $V = 8\ u.v$	$d = a\sqrt{3}$ Exemplo: $d = 2\sqrt{3}\ u$

Quadro 5 - Casos de áreas de superfícies, volumes e diagonais de prismas especiais / Fonte: a autora.

Outro tipo de poliedro relevante para os nossos estudos são as pirâmides. Uma edificação de destaque que possui esse formato é o Museu do Louvre, em Paris. Veja-o na figura a seguir.

Figura 18 - Museu do Louvre, em Paris

Descrição da Imagem: imagem do museu do Louvre, que tem formato de uma pirâmide de base quadrangular.

Observe que esse museu tem as características de uma pirâmide regular de base quadrangular. É associado a um sólido geométrico, cuja base é um polígono, e as laterais são formadas por triângulos. Podemos definir pirâmides da seguinte forma:

> A união das semirretas com origem no ponto V e que interceptam o polígono em um plano α é chamada de pirâmide, em que V é o vértice da pirâmide. É um tipo de poliedro que possui uma face em um plano oposto a um plano paralelo que contém o vértice.

Uma pirâmide pode ser reta, quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono, ou pode ser oblíqua, quando essa projeção diverge do centro do polígono. Com relação ao polígono da base, se ele for regular, a pirâmide também será nomeada de regular. Além disso, é o polígono da base que indica a nomenclatura da pirâmide, como no caso do Museu do Louvre, em que o associamos a uma pirâmide de base quadrangular. Se tivermos um pentágono na base, a pirâmide será de base pentagonal, e assim sucessivamente. Outra observação em relação à pirâmide regular é que todos os triângulos que constituem as faces laterais são isósceles e congruentes. Vejamos, a seguir, a ilustração de uma pirâmide.

Acesse o QR Code e analise os itens disponíveis na página do GeoGebra. No último box, faça a animação para visualizar, no plano e no espaço tridimensional, as possíveis bases de pirâmides regulares. Além de analisar os elementos da pirâmide, também podemos realizar a projeção de sua superfície no plano, obtendo sua planificação.

Podemos calcular as áreas de superfícies e volumes das pirâmides. Com relação à área de superfície, é preciso considerar a base e a área lateral formada por triângulos. A área total é obtida ao analisar a planificação do sólido, de modo que consideramos a área da base mais a área da lateral para calcular a medida de superfície. Assim, temos:

$$A_t = A_b + A_l$$

Em que:
A_t : área total.
A_b : área da base.

A_l : área lateral.

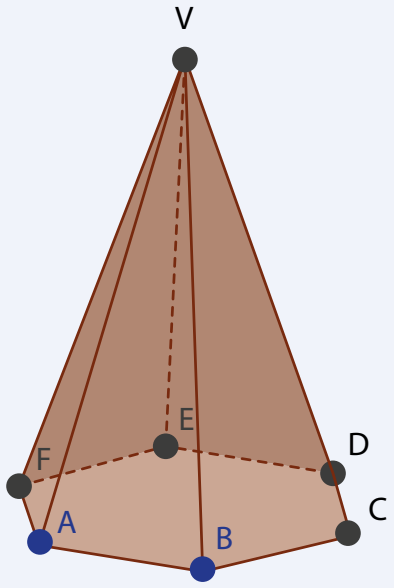
O volume de uma pirâmide é dado por sua medida de capacidade, obtido por meio da relação:

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3}$$

Em que:
V : volume.
A_b : área da base.
h : altura da pirâmide.

Vimos que há semelhanças entre o cálculo de volumes de prismas e pirâmides, mas qual é a relação existente entre eles? Temos que um prisma pode ser subdividido em três pirâmides de volumes iguais, mas é necessário possuir a mesma medida de base e de altura. Assim, o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma.

Um caso particular do cálculo de áreas de superfícies e volumes de pirâmide ocorre na pirâmide de base hexagonal regular, devido ao cálculo da área do triângulo equilátero, que é obtida por meio da expressão: $A_{\triangle} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, em que l representa a medida do lado do triângulo. Vejamos o quadro a seguir.

Pirâmide de base hexagonal regular	Área da superfície	Volume
	$A_b = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ $A_b = 3 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ $V = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot h$

Quadro 6 - Caso particular de áreas de superfície e volume de pirâmide de base hexagonal / Fonte: a autora.

Vimos, até o momento, os principais casos de poliedros, mas, também, temos os casos dos não poliedros, em que destacamos os corpos redondos: cilindros, cones e esferas. Temos diversas edificações construídas inspiradas nesses tipos de sólidos geométricos. Vejamos o exemplo do Hotel Nacional, no Rio de Janeiro, que possui o formato cilíndrico:

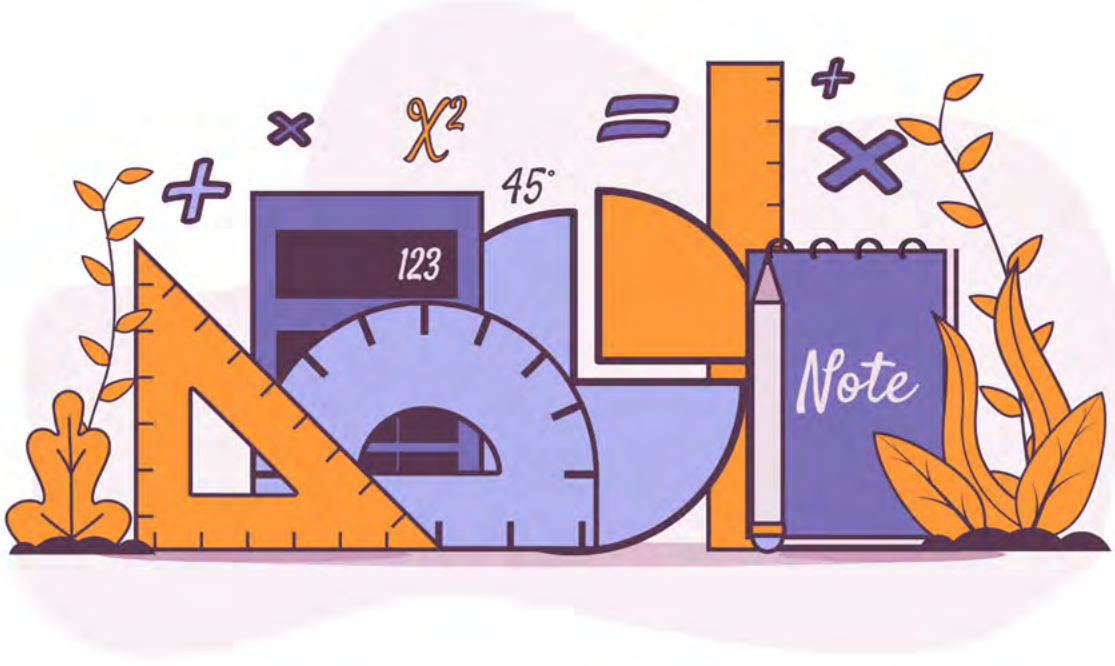


Figura 19 - Hotel Nacional, no Rio de Janeiro

Descrição da Imagem: imagem do Hotel Nacional, localizado no Rio de Janeiro. Ele possui formato cilíndrico.

Observe que a edificação se destaca dentre as demais, que possuem formatos semelhantes a paralelepípedos. Podemos definir cilindros da seguinte forma:

> Dados dois planos paralelos indicados por α e β e um círculo inserido em qualquer um dos planos. Dada uma reta r concorrente a ambos os planos, denomina-se cilindro a região dos infinitos segmentos paralelos a essa reta, com extremos no círculo e no plano paralelo ao que possui o círculo.

Há características comuns entre os cilindros e os prismas. Em ambos os casos, temos sólidos com bases opostas paralelas e iguais. No caso dos prismas, as bases são polígonos, e, no caso do cilindro, as bases são compostas por círculos. São elementos dos cilindros: o raio (r) da base, o eixo (e), a altura (h) e a geratriz (g). Os cilindros podem ser retos se o eixo for perpendicular à base ou oblíquos se o eixo não for perpendicular à base. A planificação de um cilindro consiste em dois círculos correspondentes às bases e em um retângulo, formado pelo comprimento da circunferência, que compõe o círculo da base, cuja medida é dada por $c = 2\pi r$, em que $\pi \cong 3{,}14$, e o comprimento da circunferência (c) corresponde à altura do cilindro. Podemos representar a planificação conforme a ilustração a seguir:

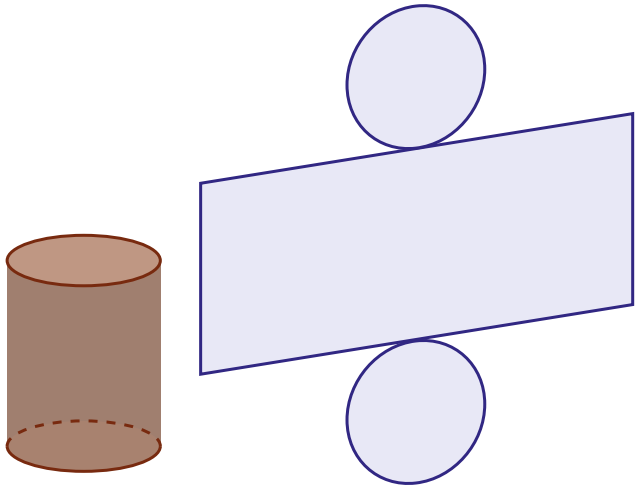


Figura 20 - Planificação do cilindro reto / Fonte: Mingoranci ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração da planificação do cilindro reto composto por dois círculos e um retângulo.

A área total do cilindro é obtida ao analisarmos a planificação do sólido, de modo que consideramos a área das duas bases mais a área da lateral para calcular a medida de superfície. Assim, temos:

$$A_t = 2A_b + A_l$$

Em que:
A_t : área total.
A_b : área da base.
A_l : área lateral.

Observamos que a área da base do círculo é dada por $A_{\bigcirc} = \pi r^2$, em que r é o raio da base. A área lateral é o resultado do produto da medida do comprimento da circunferência da base pela altura do cilindro, dada por $A_l = 2\pi r \cdot h$. O volume de um cilindro é dado por sua medida de capacidade, obtida por meio da relação:

$$V = Ab \cdot h$$

Em que:
V : volume.
A_b : área da base.
h : altura do cilindro.

Se você desenvolvesse um projeto de um reservatório de água com a altura de quatro metros, qual seria a melhor opção?
I) Em forma de paralelepípedo regular, em que a aresta da base mede dois metros.
II) Em forma de cilindro reto, com o diâmetro medindo dois metros.

Temos edificações inspiradas em formatos cônicos, que é outro tipo de corpo redondo, diferente do cilindro e com características similares às das pirâmides. Observe a Catedral de Maringá, no Paraná, que possui uma arquitetura inspirada no formato cônico.

Figura 21 - Catedral de Maringá

Descrição da Imagem: fotografia da Catedral de Maringá, a qual possui formato cônico.

Observe que a Catedral possui sua estrutura principal no formato de um cone reto. Podemos definir cone da seguinte forma:

Dado um plano α e um círculo contido nesse plano; e dado P, um ponto não pertencente ao plano α ; denomina-se cone a região delimitada pelos infinitos segmentos de reta com extremos no círculo e no ponto P, o qual se denomina vértice.

São elementos do cone: a base circular, o vértice (V), a geratriz (g) e a altura (h). Quando o cone possui a projeção do vértice coincidente com o centro do círculo da base, temos um cone reto, caso contrário, será um cone oblíquo. A altura (h) e a geratriz (g) do cone são distintas, pois as retas laterais paralelas à geratriz sempre serão oblíquas.

A planificação do cone é dada por um setor circular para a área lateral e um círculo para a base, conforme a ilustração a seguir.

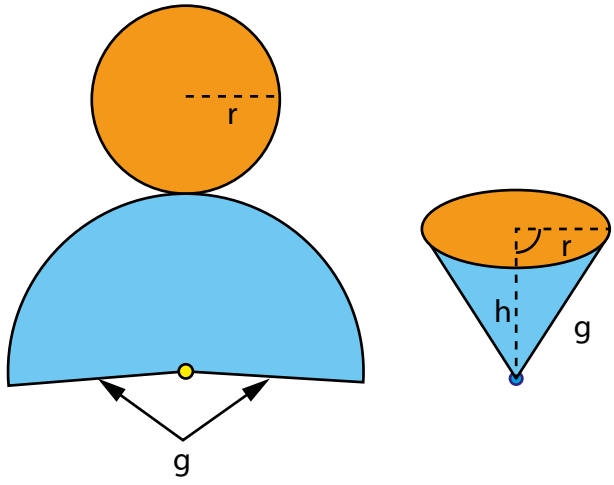


Figura 22 - Planificação do cone reto / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[6].

Descrição da Imagem: ilustração da planificação do cone reto, composto por um círculo e um setor circular.

A área total do cone é obtida ao analisarmos a planificação do sólido, de modo que consideramos a área da base, dada por $A_{\bigcirc} = \pi r^2$, mais a área do setor circular, dada por $A_l = \pi rg$, para calcular a medida de superfície. Assim, temos:

$$A_t = A_b + A_l$$

Em que:
A_t : área total.
A_b : área da base.
A_l : área lateral.

O volume de um cone é dado por sua medida de capacidade, obtida por meio da relação:

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3}$$

Em que:
V : volume.
A_b : área da base.
h : altura do cilindro.

Similar à comparação anterior entre o prisma e a pirâmide de mesma base e mesma altura, podemos comparar o cilindro e cone de mesmo raio e de mesma altura. Acesse o QR Code e veja uma comparação entre o volume do cilindro e do cone. Utilize o recurso da Geometria Dinâmica para explorar a visualização.

Temos edificações que podem ser associadas aos formatos esféricos. Vejamos o Ericsson Globe, considerado o maior edifício esférico do mundo, com capacidade máxima para 16.000 pessoas, localizado em Stockholm Globe City.

Figura 23 - Edifício Ericsson Globe, em Estocolmo

Descrição da Imagem: fotografia do edifício Ericsson Globe, que possui formato esférico.

Para a construção desse tipo de edificação, é preciso o uso de tecnologias específicas para comportar a estrutura. Apresentamos, a seguir, a definição de esfera.

Considere um ponto P como o centro da esfera, e um ponto A qualquer localizado no espaço. Denomina-se esfera a união de todos os pontos no espaço, cuja distância até P seja menor ou igual ao segmento PA, chamado de raio da esfera.

São os elementos da esfera: os polos, sendo os pontos resultantes das interseções entre o eixo e a superfície esférica. O equador, que é a circunferência de raio máximo, é formado por uma secção que corta o centro da esfera. Os paralelos são quaisquer circunferências geradas pela secção na superfície esférica e que seja paralela ao equador. Os meridianos são secções na superfície esférica em que o plano passa pelo eixo da esfera.

A área total da esfera é equivalente ao quádruplo da área do círculo de raio máximo, ou seja, o círculo formado pelo equador, dada por:

$$A_{\bigcirc} = 4 \cdot \pi r^2$$

O volume da esfera é dado por sua medida de capacidade, obtida por meio da relação:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Em que:

V : volume.

r : raio da esfera.

Vejamos um exemplo da aplicação da área da superfície esférica e o volume para uma esfera de raio de 4 cm.

a) A área total é dada por: $A_{\bigcirc} = 4 \cdot \pi r^2 \rightarrow A_{\bigcirc} = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \rightarrow A_{\bigcirc} = 200{,}96\ cm^2$.

b) Temos que o volume é dado por: $V = \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow V = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{3} \cong 267{,}95\ cm^3$.

Vimos que as esferas possuem relações diferentes das dos outros corpos redondos. Reflita sobre: ao se duplicar o raio de uma esfera, o que ocorre com o volume? E com a área da superfície?

Os corpos redondos podem ser obtidos por meio da rotação em torno de um eixo, de modo que:

- A superfície cilíndrica de revolução de eixo s, geratriz t e raio r pode ser obtida pela rotação de um retângulo em torno do eixo s.
- O cone circular reto pode ser chamado de cone de revolução, por ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.
- A esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que possui o seu diâmetro.

Quando não temos casos de poliedros ou corpos redondos, temos os não poliedros, que podem formar os mais diversos tipos de formas espaciais. Para esses casos, os cálculos de áreas de superfícies e volumes podem ser obtidos por meio do auxílio do Cálculo Diferencial e Integral pelo processo de integração de funções de múltiplas variáveis. Ilustraremos apenas o conceito envolvido, sem a aplicação dos cálculos, pois exigem um estudo específico e direcionado para essa finalidade. A integral é indicada pelo símbolo $\int$ e é aplicada a funções. Quando aplicada a uma função de uma variável em um intervalo definido, como, por exemplo $f : A \to B$, tal que $y = f(x)$, sendo representada no plano cartesiano, obtém-se a área da região delimitada pela curva e o intervalo pré-definido, conforme a ilustração a seguir:

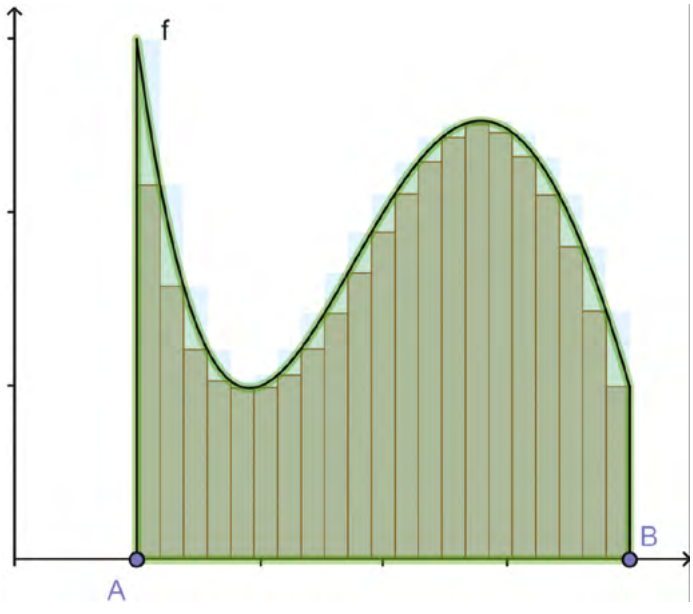


Figura 24 - Área obtida pelo processo de integração / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[7].

Descrição da Imagem: ilustração de uma área obtida pelo cálculo de uma integral de uma função.

Para a formação de sólidos constituídos por funções, é preciso considerar as funções com mais de uma variável, de modo que $f : A \to B$ e $z = f(x, y)$, sendo representadas nos sistemas de coordenadas tridimensionais. Nesses casos, podemos realizar um processo conhecido como integração dupla, para o cálculo de áreas de superfícies, e de integrais duplas e triplas, para os cálculos de volumes. Para cada situação, é necessário um procedimento de cálculo específico, mas que, em resumo, consiste em subdividir a região em prismas cada vez menores, modelando a curva no espaço. A integração seria o limite desse processo, conforme a ilustração a seguir:

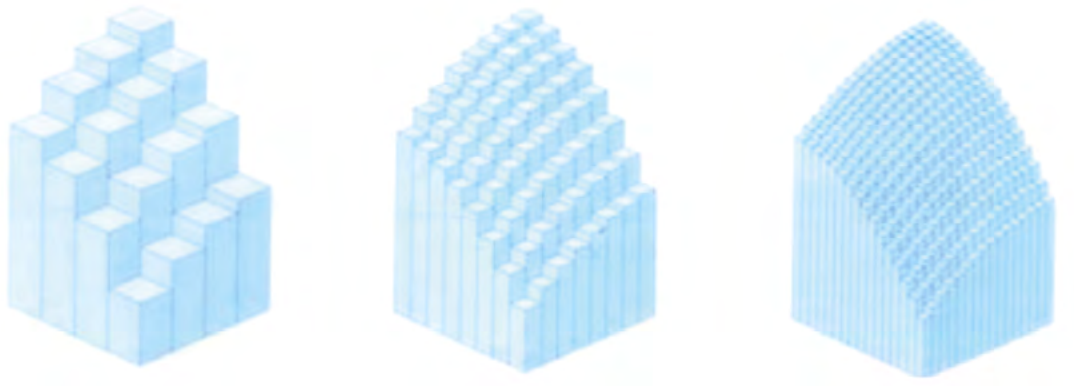


Figura 25 - Volume obtido pelo processo de integração / Fonte: Frighetto e Luvisa ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de uma área obtida pelo cálculo de uma integral de uma função.

REALIDADE AUMENTADA

Volume de sólidos curvos

Participe da discussão sobre o cálculo de áreas de superfícies e volumes e suas aplicações na Arquitetura. Aperte o play, e vamos juntos!

Dessa forma, conhecemos os principais meios de cálculos de áreas de superfícies e volumes.

Os conteúdos abordados nesta unidade são aplicações diretas da Geometria Plana, Espacial e Analítica. Como vimos, existem outros processos de cálculos de áreas e volumes por meio do Cálculo Diferencial e Integral. Para estudar mais casos e exemplos, utilize os materiais complementares indicados: *Cálculo aplicado: curso rápido,* de Larson (2011)*; Cálculo,* de Stewart (2011)*; Cálculo,* de Thomas, Weir e Hass (2002)*; e Cálculo com Geometria Analítica,* de Simmons (1987).

Agora, imagine-se como profissional que deseja construir um reservatório em formato cilíndrico, com tampa para armazenar certo líquido. O volume do reservatório deve ser de 60 m³, e o raio da base do cilindro deve ser de 1,5 m. Se o material usado na construção custa R$ 100,00 por metro quadrado, qual é o custo do material a ser utilizado?

1. Determinação da altura do reservatório indicado por h:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$
$$60 = 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot h$$
$$60 = 3{,}14 \cdot 2{,}25 \cdot h$$
$$60 = 7{,}065 \cdot h$$
$$h = \frac{60}{7{,}065}$$
$$h \cong 8{,}5\ m$$

2. Para o cálculo da área total, iniciamos pela área da base:

$$A_b = \pi r^2$$
$$A_b = 3,14 \cdot 1,5^2$$
$$A_b = 3,14 \cdot 2,25$$
$$A_b = 7,065\ m^2$$

Calculando a área lateral, temos:

$$A_l = 2\pi r \cdot h$$
$$A_l = 2 \cdot 3,14 \cdot 8,5$$
$$A_l = 53,38\ m^2$$

Obtendo a área total, temos:

$$A_t = 2A_b + A_l$$
$$A_t = 2 \cdot 7,065 + 53,38$$
$$A_t = 14,13 + 53,38$$
$$A_t = 67,51\ m^2$$

3. Cálculo do custo:

$$C = 67,51 \cdot 100$$
$$C = 6751$$

Ou seja, o custo para construir o reservatório é de R$ 6751,00.

Nessa exemplificação, vimos que, para fazer o planejamento de custo de uma obra, podemos recorrer ao cálculo de área de superfícies. Para cada tipo de superfície, teríamos que decompor, por meio da planificação, analisar o tipo de polígono que forma a composição e aplicar as fórmulas para cálculo das respectivas áreas. Uma vez obtida a área total, é possível estimar o custo por meio da média de preço por unidade de medida, que, em nosso caso, deu-se o preço por metro quadrado.

A partir do termo central "sólidos geométricos", podemos produzir um mapa mental, estabelecendo relações com tipos de sólidos e suas respectivas medidas de superfície e volumes, conforme o exemplo ilustrado a seguir.

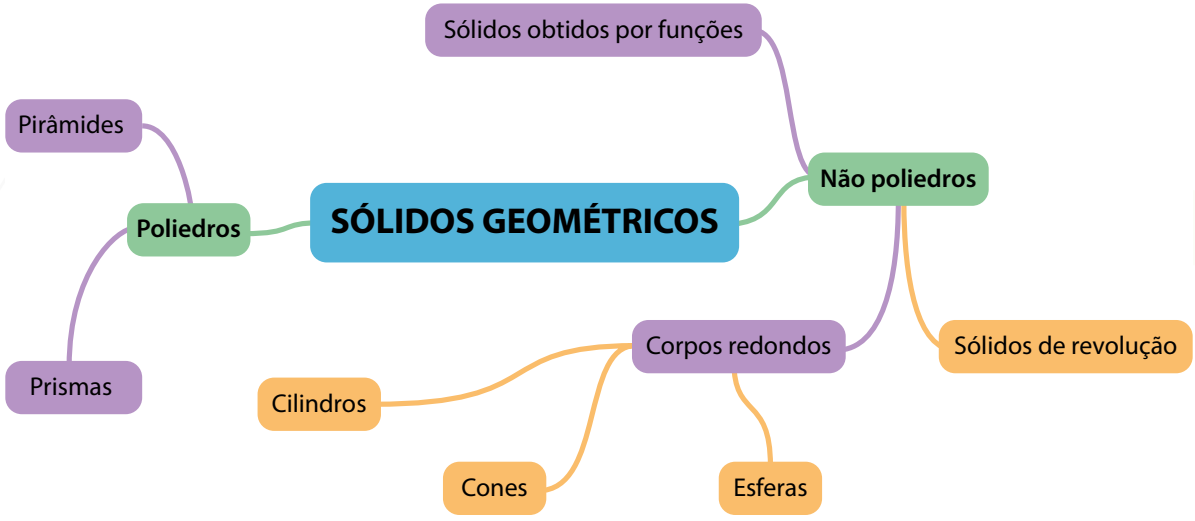


Figura 26 - Mapa mental sobre sólidos geométricos / Fonte: a autora.

Utilize o exemplo e complemente com as suas anotações de cada tópico abordado nessa unidade. Coloque, também, as imagens das representações e as fórmulas de cálculos de áreas e volumes. Para desenvolver essa atividade, recomendamos que utilize a ferramenta para criação de mapa mental disponibilizada, gratuitamente, em: https://www.goconqr.com/.

MAPA MENTAL

AGORA É COM VOCÊ

1. Em uma análise de um reservatório de água em formato cúbico, observou-se que ele foi totalmente preenchido com água. Sabe-se que o volume desse reservatório é de 729 m³. Qual é a altura desse reservatório?
   a) 7 m.
   b) 8 m.
   c) 9 m.
   d) 10 m.
   e) 11 m.

2. No desenvolvimento de um projeto residencial, será construída, no quintal, uma piscina que possui o formato de um retângulo, com seus lados medindo 10 m e 4,5 m. Se a piscina será construída com 1,5 m de profundidade para o nível de água, qual é o volume de água que caberá nela?
   a) 37, 3 m³.
   b) 42, 2 m³.
   c) 51,7 m³.
   d) 67,5 m³.
   e) 72, 3 m³.

3. Uma indústria fabrica peças pré-moldadas na forma de prisma triangular regular com a altura de 10 cm, e a aresta da base mede 6 cm. Quanto, aproximadamente, será gasto de concreto para produzir cada unidade?
   a) 124, 2 cm³.
   b) 132, 4 cm³.
   c) 140, 6 cm³.
   d) 150, 8 cm³.
   e) 155,8 cm³.

5 Noções de cálculo numérico: erro, sistema de numeração, zero de equação

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Diversos problemas cotidianos exigem tratamento de informação e análise numérica. Muitos casos que envolvem resultados aproximados possuem uma margem de erro. Nesta unidade, realizaremos um estudo sobre a Estatística Descritiva, que apresenta um método científico para a obtenção de dados; e, na sequência, estudaremos tópicos de Cálculo Numérico para subsidiar ferramentas que auxiliem, principalmente, na análise de erros na coleta de dados. No decorrer da unidade, apresentaremos exemplos de aplicações desses métodos em estudos topográficos e, também, no estabelecimento de parâmetros para a análise de resistência dos materiais. Nosso objetivo é compreender como realizar uma coleta de dados e um tratamento de informação adequados, bem como conhecer métodos numéricos, como análise de erros, sistemas de numeração e zeros de funções. Bons estudos!

Quando se trabalha com Arquitetura, Engenharia ou outras atividades da construção, levantamentos topográficos são necessários em pequenas e grandes escalas. Esse tipo de trabalho permite a representação em plantas dos limites do terreno levantado, bem como os detalhes que o caracterizam.

Por meio da Topografia, são elaboradas as curvas de nível, que representam o relevo do solo com suas elevações e depressões. É possível realizar cálculos de volumes de terra por meio desse tipo de representação, tanto para o que será retirado — ou seja, haverá um corte no terreno — quanto para o que será colocado — realizando o aterro do terreno. A Topografia também permite os estudos hidrográficos, como, por exemplo, de áreas submersas, o estudo de construção de estradas, pontes, barragens, túneis, linhas de transmissão de energia, implantação de indústrias, perfuração de minas, rede de distribuição de água e esgoto, entre outras atividades pertinentes. Vejamos um exemplo de planta topográfica.

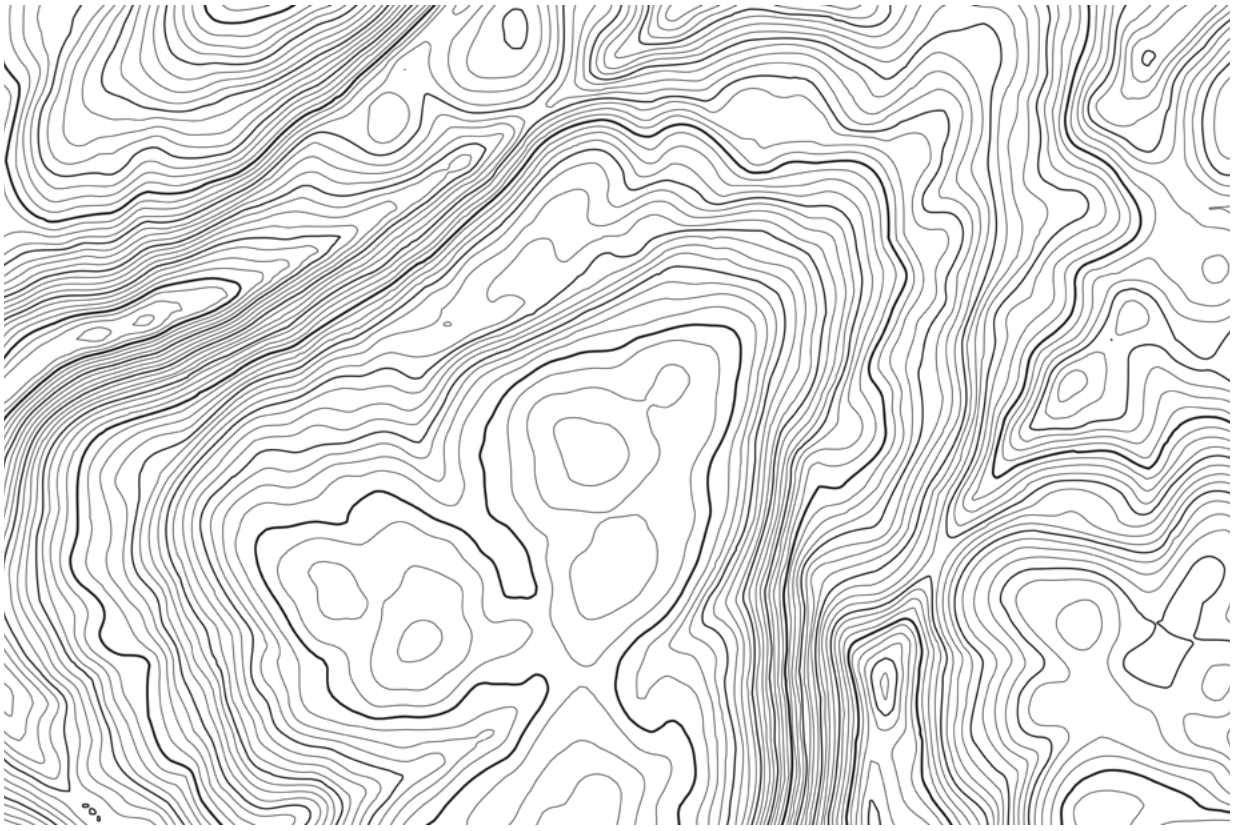


Figura 1 - Exemplo de planta com curva de nível

Descrição da Imagem: planta baixa ilustrando a representação de curvas de nível.

Uma das subáreas desse ramo é a Topografia de Precisão, em que a obtenção de medidas e as análises de margens de erros são trabalhos fundamentais dos arquitetos e engenheiros. Como realizar e analisar as medidas? Como realizar o tratamento de informação? E, ainda, como validar se a margem de erro é aceitável?

O profissional que atua com os estudos topográficos realiza levantamentos plano altimétricos do terreno, que são extremamente relevantes para desenvolvimentos de projetos. Fazem parte desse trabalho o estudo de locação de obra, o controle de prumadas e níveis e os alinhamentos aplicados a edificações. Vejamos o exemplo de uma vala para a construção da fundação de uma edificação.

Figura 2 - Exemplo de preparo para a fundação de uma edificação

Descrição da Imagem: execução de obras preparando o terreno para a construção de uma edificação.

Quando é preciso construir estradas e túneis, os levantamentos auxiliam no reconhecimento do terreno, determinam a linha de ensaio, realizam o traçado geométrico e, posteriormente, projetam a terraplenagem e transporte de terra. Já em construções de barragens, realiza-se a determinação das áreas a serem inundadas, controla-se a execução das prumadas, dos níveis e dos alinhamentos. Na figura a seguir, temos um exemplo da construção de um túnel.

Figura 3 - Exemplo de construção de túneis

Descrição da Imagem: execução de obras na construção de um túnel de duas vias.

Todos os procedimentos mencionados requerem a utilização de medições precisas para que o trabalho seja realizado com qualidade. Levantamentos mal realizados podem comprometer todo o desempenho de uma obra, entretanto, temos que entender que existem margens de erros no processo de coleta de dados, mas esses erros precisam ser aceitáveis.

Quais são as técnicas empregadas nesse processo? Como você definiria uma margem de erro aceitável na construção de uma residência, por exemplo?

Nos estudos topográficos, é preciso que se fixem os limites para que os dados sejam aceitáveis. Acima desses limites, o erro será exagerado, e os dados não poderão ser utilizados, pois comprometem estudos posteriores. Iniciaremos nossos estudos ao conhecer as formas de realizar o tratamento de informação por meio da Estatística Descritiva e, posteriormente, alinharemos esse estudo com o tratamento numérico das informações, auxiliado pelos métodos do Cálculo Numérico.

Antes de iniciarmos, reflita sobre os possíveis impactos de um erro estatístico na coleta de dados topográficos. Quais seriam as consequências na construção de uma residência? Anote suas observações e hipóteses em seu Diário de Bordo.

DIÁRIO DE BORDO

Entre os métodos científicos adotados para o tratamento de informação, podemos mencionar o método experimental e o método estatístico. A Estatística é subdividida em Estatística Descritiva e Estatística Inferencial. Para os nossos estudos, conheceremos os métodos da Estatística Descritiva, a qual possibilita o tratamento de informações realizado por meio de coletas de dados, admitindo as causas presentes e registrando as variações para realizar uma análise e apresentar um resultado final.

A Estatística é um ramo da Matemática que propicia métodos de coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados a serem utilizados para a tomada de decisões, é um processo descritivo. Caso seja necessária uma análise probabilística, gerando uma margem de incerteza, ela caberá aos estudos da Estatística Inferencial, que envolve a Teoria da Probabilidade para a inferência dos dados. Diante do contexto de aplicações em Arquitetura e Engenharia, de modo geral, estudaremos a parte que pertence à Estatística Descritiva. Iniciaremos com a descrição das fases do método estatístico.

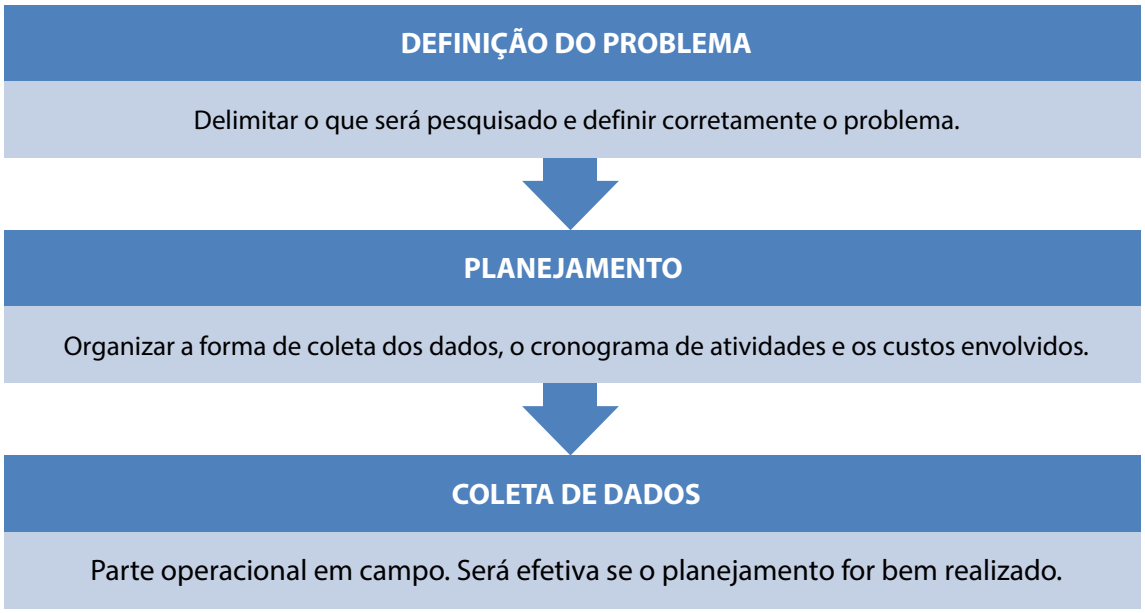


Figura 4 - Método estatístico / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um organograma que indica o processo do método estatístico por meio da definição do problema, que é delimitar o que será pesquisado e definir corretamente o problema; do planejamento: organizar a forma de coleta dos dados, o cronograma de atividades e os custos envolvidos; e da coleta de dados: parte operacional em campo, será efetiva se o planejamento for bem realizado.

Com relação à coleta de dados, quando vamos a campo para fazer a tomada desses valores, eles são considerados primários. Quando são obtidos por meio de levantamento de outras fontes, são tidos como dados secundários. Sempre é mais seguro trabalhar com dados obtidos de fontes primárias, pois os dados secundários podem propiciar erros de coleta. As formas de coletas podem ser:

Figura 5 - Coleta de dados / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de quatro retângulos que apresentam as formas de coletas de dados, que são a direta — obtida diretamente na fonte —, a contínua — ocorre conforme a demanda —, a ocasional — se houver a necessidade, a coleta é feita —, ou a indireta — realizada por meio de analogia, avaliação de indícios ou propocionalização.

Após realizar a coleta, é preciso apurar os dados. Pode-se fazer um resumo por meio da sua contagem e de seu agrupamento, realizando, por exemplo:

I) A condensação e tabulação dos dados, que é uma apresentação numérica em linhas e colunas distribuídas de modo ordenado.

II) A apresentação gráfica dos dados numéricos, em que é possível uma visão rápida dos dados apresentados.

A partir da representação dos dados, é preciso a análise e a interpretação, que é uma fase importante e delicada, pois é nela que ocorre a tomada de decisões. Os fenômenos estatísticos são os eventos que se pretende analisar e são subdivididos em:

Figura 6 - Tipos de fenômenos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: caracterização dos diferentes tipos de fênomenos. Os fenômenos coletivos não podem ser definidos por uma simples observação, por exemplo, o custo médio da produção de um produto; os individuais são aqueles que compõem os fenômenos coletivos; e os de multidão acontecem quando as características observadas para a massa não são válidas para um caso particular.

Os resultados possíveis da análise de um fenômeno são denominados **variável**, que são os atributos dos dados qualitativos e são descritos da seguinte forma:

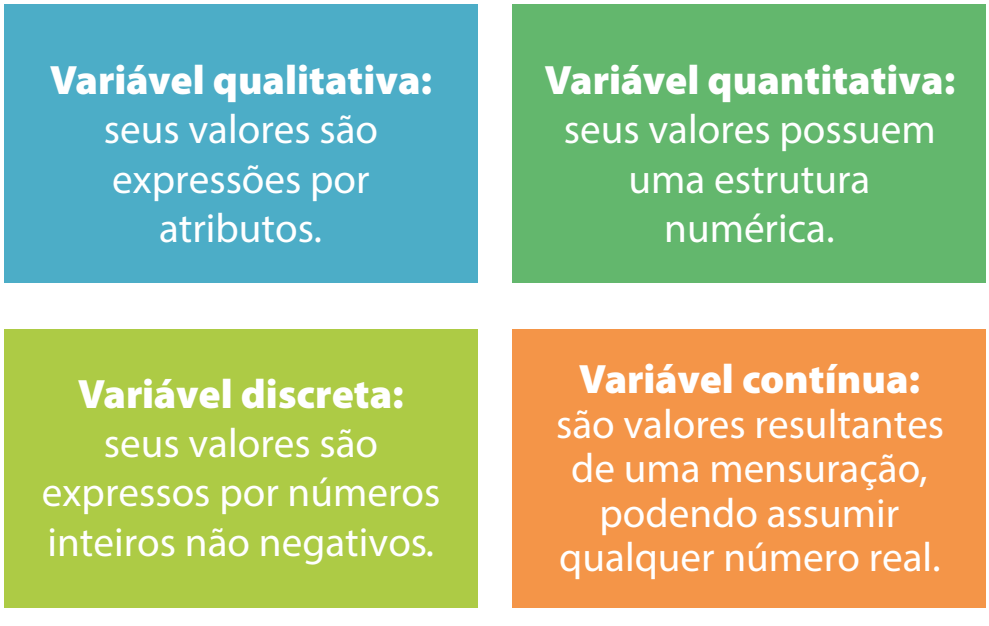


Figura 7 - Tipos de variáveis / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de quatro retângulos contendo os diferentes tipos de variáveis: a qualitativa — seus valores são expressões por atributos —; a quantitativa — seus valores possuem uma estrutura numérica —; a discreta — seus valores são expressos por números inteiros não negativos; e a contínua — são valores resultantes de uma mensuração, podendo assumir qualquer número real.

Os dados obtidos em uma coleta e que comporão algum tipo de fenômeno são considerados a base para se aplicarem os métodos estatísticos. Quando analisamos um conjunto total de elementos que possuem características em comum, ele é denominado população; quando é analisada apenas uma parcela representativa dessa população, com o propósito de tomar decisões sobre ela, temos uma amostra. Além disso, podem ser utilizados parâmetros, que são valores singulares que existem na população e são utilizados para caracterizá-la. Há a possibilidade de se realizar uma estimativa para obter um valor aproximado para um parâmetro.

Com relação às formas de amostragem, para se ter garantia de um método científico, é preciso que todos os elementos da amostra tenham a mesma probabilidade de ocorrência em relação à população, desenvolvendo-se várias técnicas para recolher as amostras, que garantem a aplicação de inferências:

a. Amostragem aleatória simples: equivale a um sorteio numérico de um elemento de uma sequência que pertence à amostra.
b. Amostragem proporcional ou estratificada: subdivide o todo em subpopulações, e realiza-se o sorteio dos elementos de cada estrato dessas subpopulações.
c. Amostragem sistemática: é utilizada quando os elementos estão organizados de forma ordenada, sendo selecionada a amostra de acordo com a necessidade do pesquisador.
d. Amostragem por conglomerados: quando não é possível identificar os elementos de uma população, faz-se o sorteio de uma amostra de cada conglomerado.

Temos outras formas de colher dados por amostragem que não envolvam métodos probabilísticos, entretanto, nesses casos, não é recomendada a generalização dos resultados para a população, pois esses dados podem ser não representativos. Dentre essas formas, temos a **amostragem acidental**, em que são tomados elementos aleatórios; a **amostragem intencional**, na qual se determinam os critérios para selecionar a amostra; e a **amostragem por quotas.**

Para a apresentação dos dados, recomenda-se uma disposição sistemática. Uma das formas indicada pelo IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística é o uso de tabelas como um quadro-resumo dos dados obtidos, organizando-os em linhas e colunas de modo sistemático (IBGE, 1993). Nas células, devem ser indicadas:

I. Um traço horizontal quando o valor é zero.
II. Três pontos quando não foram obtidos dados.
III. Um ponto de interrogação se houver dúvidas em relação à exatidão dos dados.
IV. Os lados direito e esquerdo da tabela devem ser abertos.

As tabelas apresentam a distribuição dos dados em função da época, do local ou da espécie. Podem ser do tipo simples ou conjugadas, ou seja, de dupla entrada. Vejamos um exemplo do segundo caso em uma situação hipotética da organização de dados da medição das áreas de lotes de dois barros A e B.

Lotes	Metragem de lotes do bairro A	Metragem de lotes do bairro B
1	200 m²	75 m²
2	185 m²	90 m²
3	225 m²	100 m²
4	250 m²	85 m²
5	240 m²	80 m²
6	195 m²	100 m²
7	210 m²	110 m²
8	225 m²	105 m²
9	225 m²	100 m²
10	230 m²	100 m²

Tabela 1 - Exemplo de tabela de dupla entrada com dados fictícios / Fonte: a autora.

Outra forma de apresentação dos dados é por meio de gráficos estatísticos, sendo os mais usuais os de barras ou colunas e os de setores. Na sequência, apresentamos os dados da Tabela 1 em forma de gráfico de colunas verticais.

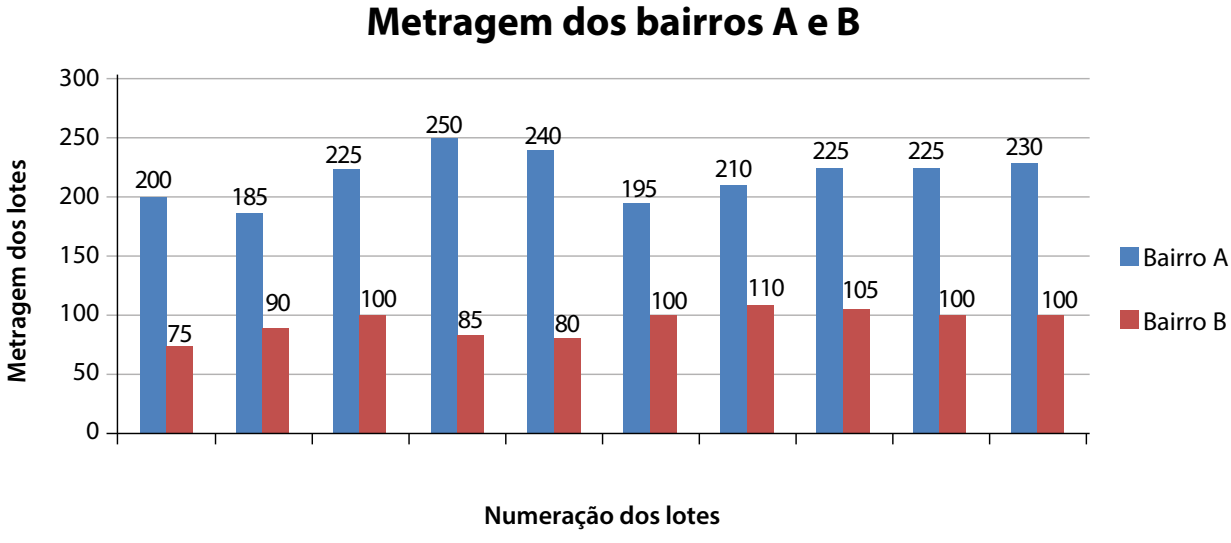


Figura 8 - Exemplo de gráfico de colunas / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração dos dados da tabela anterior em forma de gráfico de colunas verticais, que indica, no eixo horizontal, a numeração dos lotes e, no eixo vertical, a metragem dos lotes.

Os mesmos dados utilizados no gráfico de colunas verticais podem ser expressos na forma de gráfico de barras horizontais, conforme a ilustração a seguir:

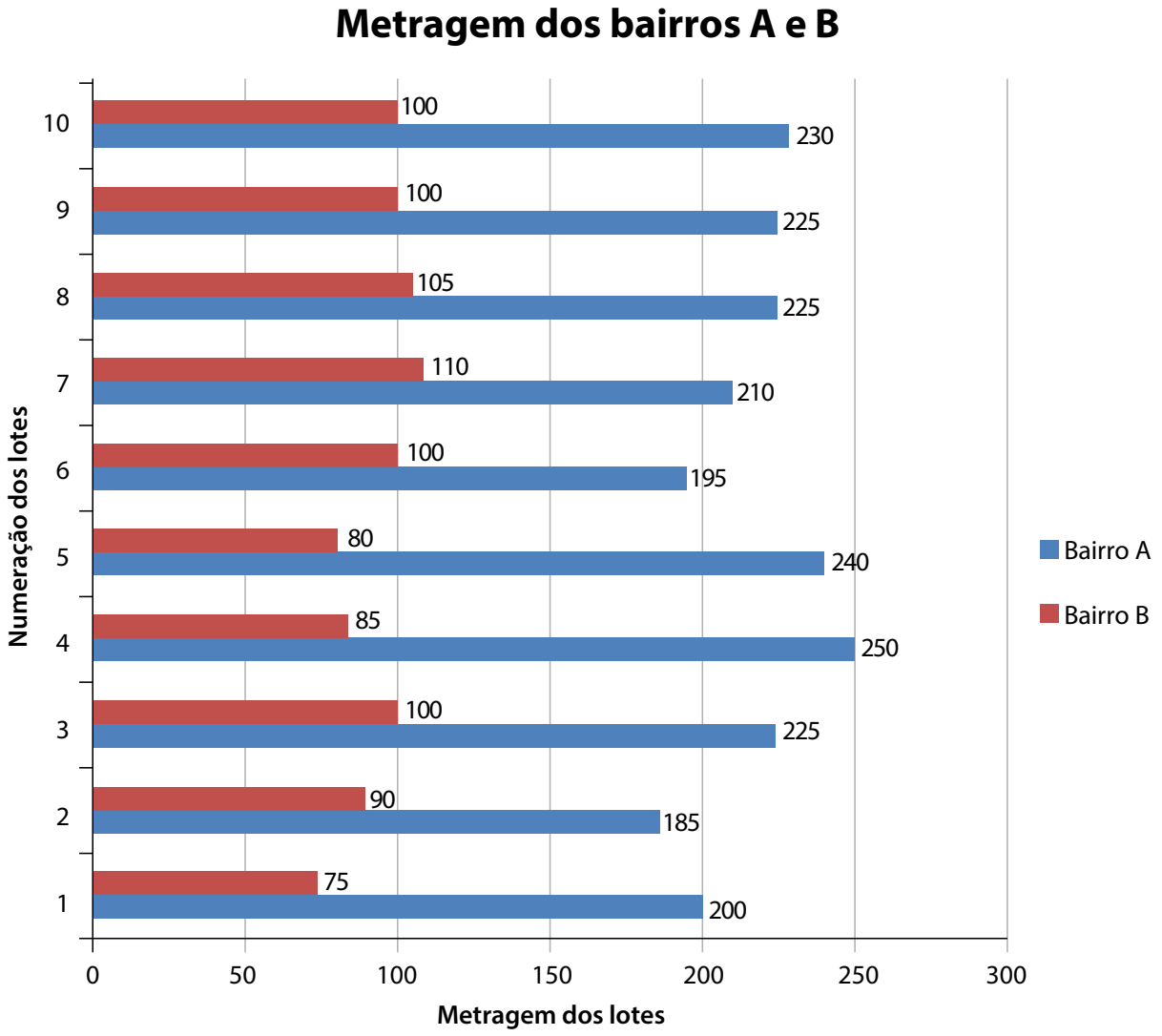


Figura 9 - Exemplo de gráfico de barras / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração dos dados da tabela anterior em forma de gráfico de colunas verticais, que indica, no eixo horizontal, a metragem dos lotes e, no eixo vertical, a numeração dos lotes.

Os gráficos apresentados são representações visuais dos dados e devem ser associados às tabelas, não devem substituí-las, mas, sim, complementá-las. É importante que sejam apresentados de modo claro e objetivo e que sempre indiquem a fonte de obtenção dos dados. Os gráficos são uma ferramenta a mais para auxiliar a fase de análise dos dados, além de serem informativos. Entretanto, o seu uso indevido pode trazer uma falsa ideia dos dados, prejudicando o processo de análise destes.

Outro tipo de gráfico é o de setores, utilizado para a relação de parte e todo de uma população, normalmente, expresso em porcentagem. Vejamos, na sequência, uma representação de gráfico de setores que utiliza a escala de cores como meio para expressar a coleta de dados, além da atribuição dos valores significativos indicados em porcentagem.

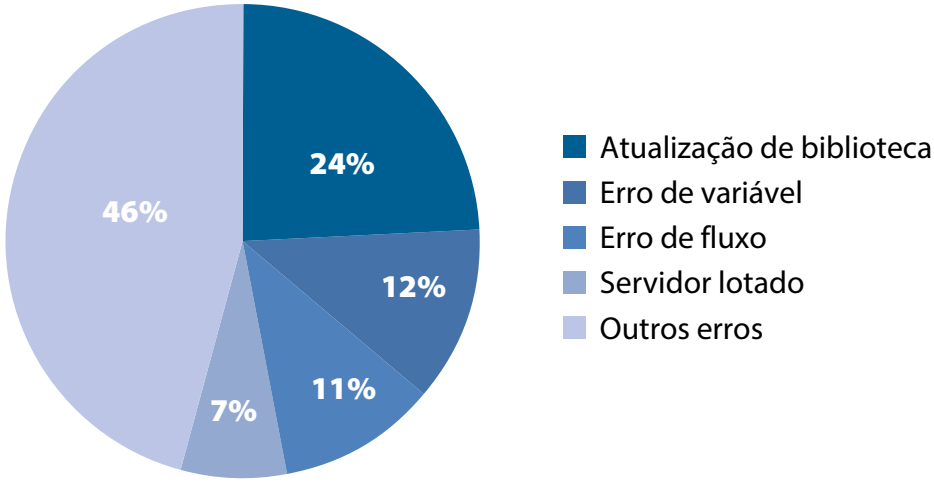


Figura 10 - Exemplo de gráfico de setores / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um gráfico de setores com dados fictícios, em que 24% corresponde à atualização de biblioteca; 12%, ao erro de variável; 11% corresponde ao erro de fluxo; 7%, ao servidor lotado; e 46% corresponde a outros erros.

Para a construção de tabelas e gráficos, um dos recursos tecnológicos indicados são as planilhas eletrônicas, em que inserimos os dados da tabela e aplicamos o comando para a inserção dos gráficos de acordo com o tipo de dados utilizados, conforme realizado na tabela e nos gráficos de colunas e barras apresentados anteriormente.

Figura 11 - Ilustração sobre o uso de planilha eletrônicas / Fonte: Pixabay (2018, on-line).

Descrição da imagem: imagem ilustrativa da criação de gráfico de setores e coluna com o uso de planilhas eletrônicas.

Além da organização dos dados obtidos em tabelas e representações gráficas, a Estatística dispõe de métodos para a apresentação dos dados. A distribuição de frequência, por exemplo, é uma tabela que condensa uma coleção de dados de acordo com a repetição de seus valores. Primeiramente, obtém-se a tabela primitiva, também conhecida como dados brutos; a partir disso, realiza-se a ordenação dos dados de forma crescente ou decrescente. Essa ordenação é denominada ROL, e contabiliza-se a frequência de cada dado durante a coleta, podendo ser apresentada sem intervalo de classe, conforme o exemplo a seguir:

Dados	Frequência
A	3
B	2
C	1
D	1
E	1
F	2
G	2
H	1
I	1
J	1
K	1
L	2
Total	**18**

Tabela 2 - Exemplo de tabela com distribuição de frequência / Fonte: a autora.

Se o tamanho da amostra for elevado, recomenda-se organizar os dados em classes por meio de agrupamentos e os valores indicados de acordo com o intervalo de classe. Por exemplo:

Dados	Frequência
A ⊢ D	6
D ⊢ G	4
G ⊢ J	4
J ⊢ M	4
Total	**18**

Tabela 3 - Exemplo de tabela com distribuição de frequência organizada em classes / Fonte: a autora.

O símbolo ⊢ é indicado para incluir o marco inicial e excluir o marco final. É possível realizar outras complementações na tabela de distribuição de frequências, como, por exemplo, a frequência acumulada e a frequência percentual, que seria a obtenção das porcentagens de cada parte dos dados.

Os dados obtidos podem ser organizados para calcularmos as medidas de posição, entre elas, destacamos a moda, a mediana e a média. Utilizaremos os dados da Tabela 1 para elaborar um exemplo de tratamento desse tipo de informação. Consideraremos os dados brutos da metragem de lotes do bairro A, indicados por $200\ m^2$, $185\ m^2$, $225\ m^2$, $250\ m^2$, $240\ m^2$, $195\ m^2$, $210\ m^2$, $225\ m^2$, $225\ m^2$ e $230\ m^2$.

I. Média (M_e): refere-se à soma de todos os elementos do conjunto dividida pelo número de termos. Considerando os dados da Tabela 1, para o bairro A, temos:

$$M_e = \frac{200+185+225+250+240+195+210+225+225+230}{10} = \frac{2185}{10} = 218,5$$

Pode ser realizada de modo ponderado, isto é:

$$M_e = \frac{200+185+3\cdot 225+250+240+195+210+230}{10} = \frac{2185}{10} = 218,5$$

Em ambas as situações, obtemos que a metragem média dos terrenos é de $218,5\ m$.

II. Moda (M_o): refere-se ao valor que aparece com mais frequência em um conjunto de dados. Considerando os dados da Tabela 1, para o bairro A, temos:

$$M_o = 225$$

III. Mediana (M_d): refere-se ao centro do conjunto de dados ordenados de forma crescente ou decrescente. Considerando os dados da Tabela 1, organizados em ordem crescente, para o bairro A, temos:

$185\ m^2,\ 195\ m^2,\ 200\ m^2,\ 210\ m^2,\ 225\ m^2,\ 225\ m^2,\ 225\ m^2,\ 230\ m^2,\ 240\ m^2,\ 250\ m^2.$

Se o conjuntos de números for ímpar, obtemos a mediana, localizando o termo central. Se o conjunto de números for par, a mediana é dada pela média dos termos centrais, ou seja, para os dados da Tabela 1 do bairro A, temos:

$$M_d = \frac{225+225}{2} = 225$$

Quando realizamos a análise da resistência dos materiais, um dos fenômenos que pode acontecer é a deformação que todos os corpos sofrem, causando deslocamentos ou mudanças de precisão. É um tipo de grandeza geométrica medida por técnicas experimentais, podendo ocorrer deformações denominadas normais e deformações por cisalhamento. Como, por exemplo, no teste de resistência do concreto indicado a seguir.

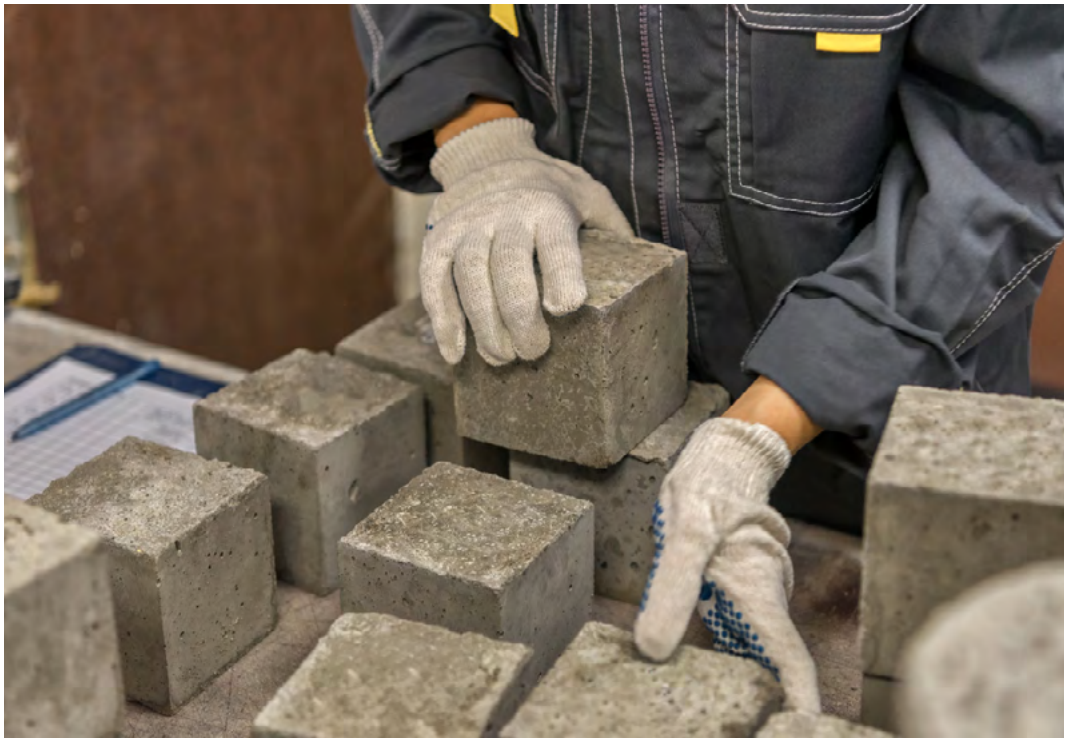


Figura 12 - Exemplo da coleta de dados de um experimento de resistência do concreto

Descrição da imagem: ilustração de uma bancada com blocos de concretos e um papel para anotação da coleta de dados a respeito das dimensões desses blocos.

Para analisar esse fenômeno, são tomadas as medidas do material em diferentes condições. Nessa etapa, pode-se organizar os dados em uma tabela de distribuição de frequências, e, caso a amostra tenhas grandes variações, podemos reagrupar em classes. Outro cálculo que é obtido nesse processo é a deformação média, utilizando os conceitos relacionados à média aritmética ou ponderada para se obter um parâmetro para a deformação de determinado material, como, por exemplo, o concreto.

Vimos, anteriormente, os principais tópicos relacionados ao tratamento de informação, mas, em coletas de dados, também é preciso realizar análises numéricas, para isso, apresentaremos alguns tópicos do cálculo numérico relacionado a análises de erros, sistema de numeração e zeros de funções que auxiliam nesse processo. Começamos abordando os diferentes tipos de erros que podem surgir no levantamento de dados.

Pela análise de erros referente a um valor obtido, podemos verificar se um dado atende aos limites mínimos desejáveis para que seja aceito como válido. Quando lidamos com a coleta de dados, necessitamos de procedimentos matemáticos para fornecer métodos que garantam a validade desses resultados. Um exemplo disso é quando aplicamos o arredondamento em um número que possui infinitas casas decimais: pode ocorrer um erro de arredondamento, prejudicando a análise dos resultados dependentes desse dado. Destacamos, também, os erros de truncamento, que ocorrem, por exemplo, quando buscamos soluções de equações que envolvem diversas etapas de resolução, e, no meio desse processo, é desprezada parte das casas decimais.

Para minimizar esses tipos de situações, diversas análises podem decorrer de métodos numéricos. É preciso definir o erro aceitável para que haja um parâmetro e validar a qualidade da aproximação realizada. Definiremos, a seguir, os tipos de erros que são utilizados nos métodos numéricos.

I. Erro absoluto:

$$E_{abs} = \left|(valor\ calculado) - (valor\ verdadeiro)\right|$$

II. Erro relativo:

$$E_{rel} = \left|\frac{(valor\ calculado) - (valor\ verdadeiro)}{(valor\ verdadeiro)}\right|$$

III. Erro percentual:

$$E_{per} = \left|\frac{(valor\ calculado) - (valor\ verdadeiro)}{(valor\ verdadeiro)}\right| \cdot 100$$

Para exemplificar a aplicação das definições, suponhamos que o valor numérico de um evento seja 5, mas o valor obtido por meio de cálculos numéricos seja de 4,5, assim, temos:

a) Erro absoluto:

$$E_{abs} = \left|4,5 - 5\right| = 0,5$$

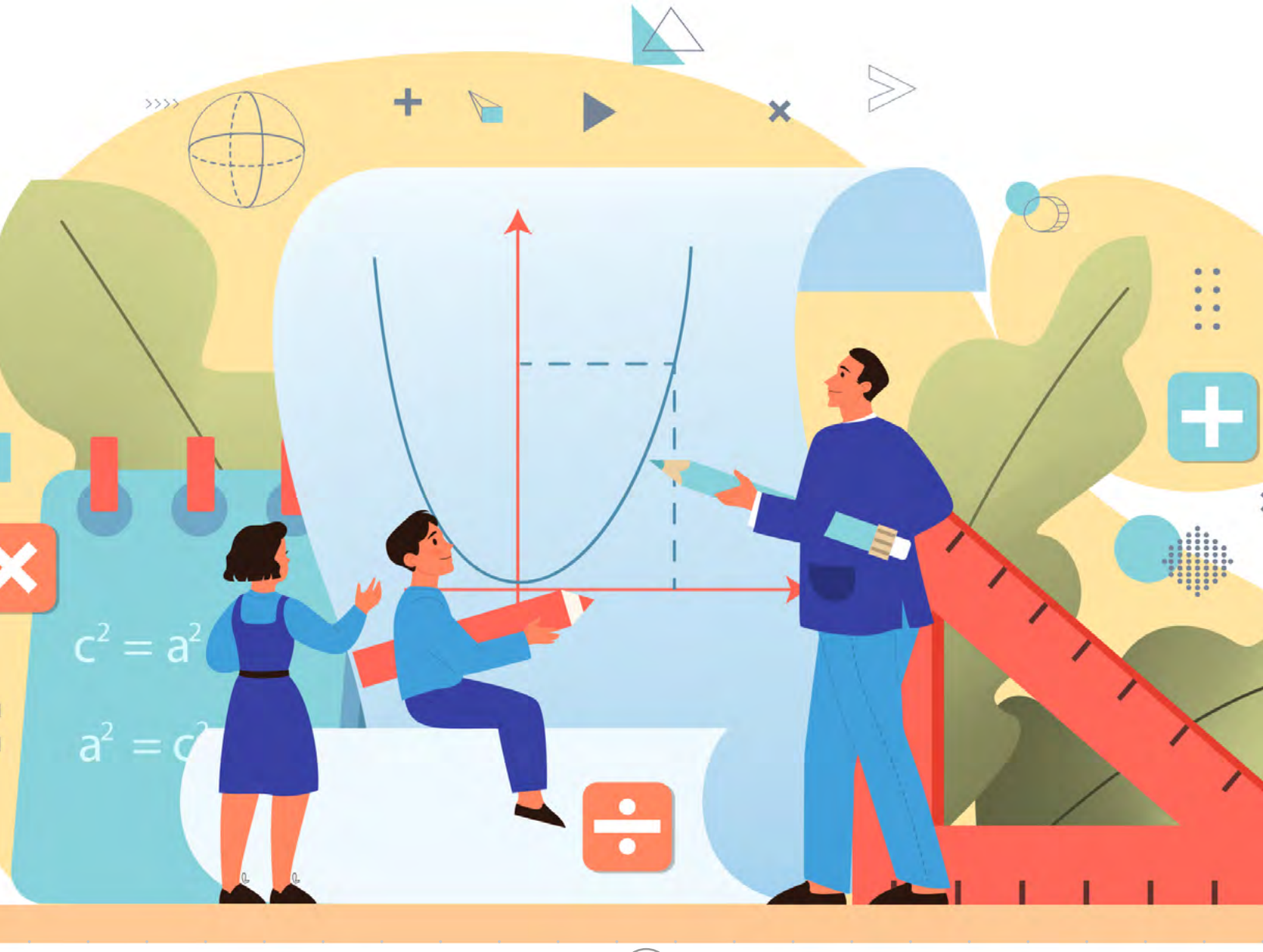
b) Erro relativo:

$$E_{rel} = \left| \frac{4,5-5}{5} \right| = 0,1$$

c) Erro percentual:

$$E_{per} = \left| \frac{4,5-5}{5} \right| \cdot 100 = 10\%$$

Dependendo da circunstância, não é necessária a aplicação do módulo de um número, apenas quando o valor calculado é menor que o valor verdadeiro, pois é preciso indicar o valor absoluto para a análise de erros.



Borges (1999) apresenta exemplos de aplicações em que há a necessidade da análise de erros nos estudos topográficos ao medir as distâncias com correntes e fechamento poligonal.

a. Erro de medição: para ter um erro aceitável na obtenção de uma distância, o seu erro está na relação menor ou igual 1/1000, isto é, 1 m em cada quilômetro medido ou, ainda, 10 cm em cada 100 m ou 2 cm em cada 20 m. Os principais motivos de erros na obtenção das distâncias, segundo o autor, são:

    - Colocar-se atrás das balizas, e não lateralmente. Em posição incorreta, o observador não verá corretamente a inclinação das balizas para frente e para trás, provocando um erro maior que o aceitável.
    - Segurar as manoplas fora do eixo da baliza.
    - Esticar pouco a corrente.
    - Esticar a corrente fora da linha horizontal.

b. Erro provocado por catenária: em virtude do peso elevado da corrente, é preciso considerar que, mesmo esticada com força, ela apresentará uma curvatura.

c. Erro de fechamento angular na determinação de rumos ou pelos azimutes calculados.

d. Erro de fechamento angular determinado pela somatória de ângulos internos de uma poligonal fechada.

e. Erro de fechamento linear.

Na análise dos erros apresentados, deve-se considerar que erros de fechamentos menores não significam que o levantamento do polígono seja melhor do que outro com erros maiores, pois pode ter ocorrido a compensação dos erros. Além disso, uma coleta de dados com erros de fechamento acima dos permitidos não deverá ser aceita, e o processo de coleta precisa ser reinicializado.

Segundo Borges (1999), quando forem necessárias medidas de alta precisão de uma distância, deve-se adotar métodos especiais, que exigem um tempo maior de dedicação, pois a precisão é fundamental, como, por exemplo, na distância da linha base para triangulações, porque, com base em apenas uma medida em linha, muitas outras serão obtidas com o auxílio da Trigonometria. Vejamos a ilustração de um processo que utiliza trenas na medição.

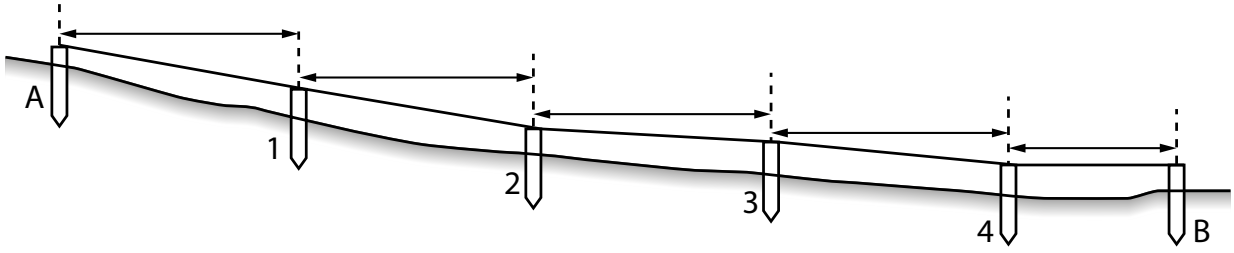


Figura 13 - Exemplo de coleta de distâncias com o uso de trena / Fonte: Borges (1999, p. 22).

Descrição da Imagem: ilustração das estacas e linhas de medição de distâncias.

Em coletas de dados experimentais, qual é a necessidade de conhecer o erro envolvido em cálculos numéricos? Quando é possível indicar que um erro é significativamente pequeno para determinada análise? Para complementar os seus estudos sobre análise do erro, acesse o material indicado no QR Code e estude sobre os tipos de erros apresentados.

Dependendo do volume de dados obtidos em uma coleta de dados, pode ser necessário que a análise numérica seja realizada com o auxílio de computadores e calculadoras. Para utilizar esses recursos, poderá ser necessário usar a base binária adotada na linguagem de programação. Desse modo, veremos como os números são representados na base decimal e na base binária.

Um número representado na base 10, ou sistema decimal, adota dez dígitos para a composição dos números, nesse caso, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Esse sistema de numeração é decimal e posicional; devido à combinação de dez algarismos, é possível escrever qualquer número, seja um decimal muito pequeno ou um número inteiro muito grande. Com relação ao valor do algarismo, o que diferencia é a sua posição, por exemplo, no numeral 13, o algarismo 3 representa três unidades, enquanto, no numeral 31, o algarismo 3 representa 30 unidades. Com uma pequena quantidade de símbolos, podemos expressar qualquer valor por meio das possíveis combinações. Por ser um sistema de numeração de posição, conseguimos representar qualquer número em sua forma polinomial ao escrever os números por meio da multiplicação de fatores com uma base comum. Esse fato é que possibilita a mudança de bases. Vejamos a forma polinomial de representação dos números:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$$

Em que:

$0 \leq a_i < b$

$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$

Utilizando a forma polinomial, podemos representar os números da seguinte forma:

- $15 = 10 \cdot 1 + 5$
- $247 = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$
- $1345 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$
- $43987 = 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7$

Na base 2, também conhecida como sistema binário, em que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1, temos a seguinte escrita na forma polinomial:

- $(101100)_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1.2^2 + 0 \cdot 2 + 0$

De forma genérica, um número pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \pm \left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_n}{\beta^n} \right] \cdot \beta^{\exp}$$

Em que:

d : números inteiros contidos no intervalo.

β : base do sistema de numeração.

$\exp$: representa o expoente que a base assume dentro dos limitantes inferiores e superiores.

$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Utilizando a definição apresentada, podemos ter os seguintes casos representados na base 10:

- $0,3728 = \left[\frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4}\right] \cdot 10^0$
- $54,173\left[\frac{5}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{3}{10^5}\right] \cdot 10^2$

De modo análogo aos números escritos na base 10, ilustraremos um exemplo de número escrito na base 2:

- $(0,1111)_2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{100}}\right] \cdot 2^0$

Observando os exemplos apresentados, reflita sobre as semelhanças presentes em cada sistema de numeração. Quais são os padrões que você consegue observar?
Para complementar seus estudos, assista ao vídeo sugerido sobre a mudança do sistema decimal para a base binária acessando o QR Code.

No estabelecimento de relações entre grandezas, em que definimos leis de formações a partir de padrões e regularidades presentes nos dados observados, existem situações que são descritas por funções, por exemplo, polinomiais com grau superior a 2, em que pode ser preciso determinar suas raízes, isto é, os valores que a variável independente assume quando a função é igualada a zero. Por exemplo, no estudo da resistência de materiais, quando se analisa a tensão de cisalhamento máxima no plano, é preciso determinar as raízes de uma função trigonométrica. Temos como ferramenta os métodos analíticos, por meio do uso do Cálculo Diferencial e Integral, ou, ainda, os métodos numéricos definidos pelos estudos do cálculo numérico.

As raízes de uma função são os valores que tornam a igualdade $f(x)=0$ verdadeira, sendo f uma função que possui domínio real e contínua em um intervalo $[a,b]$. Em um caso como o do exemplo, o cálculo numérico pode auxiliar no processo de determinação dessas raízes.

Há métodos para se determinar as raízes de uma equação. Destacamos os métodos numéricos iterativos, que consistem em determinar o valor de uma raiz, a partir de uma solução inicial, por meio de sequências de soluções aproximadas. O primeiro passo para esse processo é localizar o intervalo em que a raiz está contida e, posteriormente, dentro desse intervalo, refinar a aproximação inicial. Para determinar o intervalo $[a,b]$ ao qual a raiz da função pertença, é preciso considerar que:

Dada $f:A\to B$ sendo expressa por $f(x)$ contínua, se $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais diferentes, então, no intervalo $[a,b]$, existe, ao menos, uma raiz real dessa função.

Para que uma função seja considerada como contínua, é preciso que satisfaça as seguintes condições:

1. $f(a)$ deve existir.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ deve existir.
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ao determinar o intervalo ao qual a raiz pertence, é preciso aproximar o valor, a fim de minimizar os erros de aproximação até obtermos um erro aceitável. Para isso, é preciso estabelecer um critério de parada para que o processo de iterações seja interrompido. Isso ocorre se ao menos um dos seguintes critérios é satisfeito.

I) $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{\max(1,|x_k|)} < \varepsilon$

II) $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{x_{k-1}} < \varepsilon$

III) $f(x_k) < \varepsilon$

Em que:

x_k : valor aproximado da raiz da função após as quantidades k de interações.

ε : valor do erro aceitável para a aplicação realizada.

Para determinação das raízes de uma função pelo método iterativo, temos diversos métodos. A título de exemplo, realizaremos um método específico denominado método da bissecção. Ele consiste em, a cada iteração, diminuir ao meio a amplitude do intervalo em que está contida a raiz da função. Para iniciar o procedimento, precisamos determinar dois valores x_0 e x_1 de modo que $f(x_0)$ e $f(x_1)$ possuam sinais opostos. Posteriormente, calcula-se um valor x_2 por meio da média dos limitantes do intervalo, isto é:

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

Reduzindo, dessa forma, a amplitude do intervalo inicial pela metade. Para avaliar em qual parte teremos a raiz da função, verifica-se $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$, determinando os dois novos valores que possuem sinais opostos. Esse processo é repetido até que a aproximação tenha um erro aceitável, ou seja, teremos uma aproximação adequada.

Para a função definida por $f : R \to R$, tal que $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, temos três raízes, descritas pelos pontos A, B e C, conforme a ilustração a seguir:

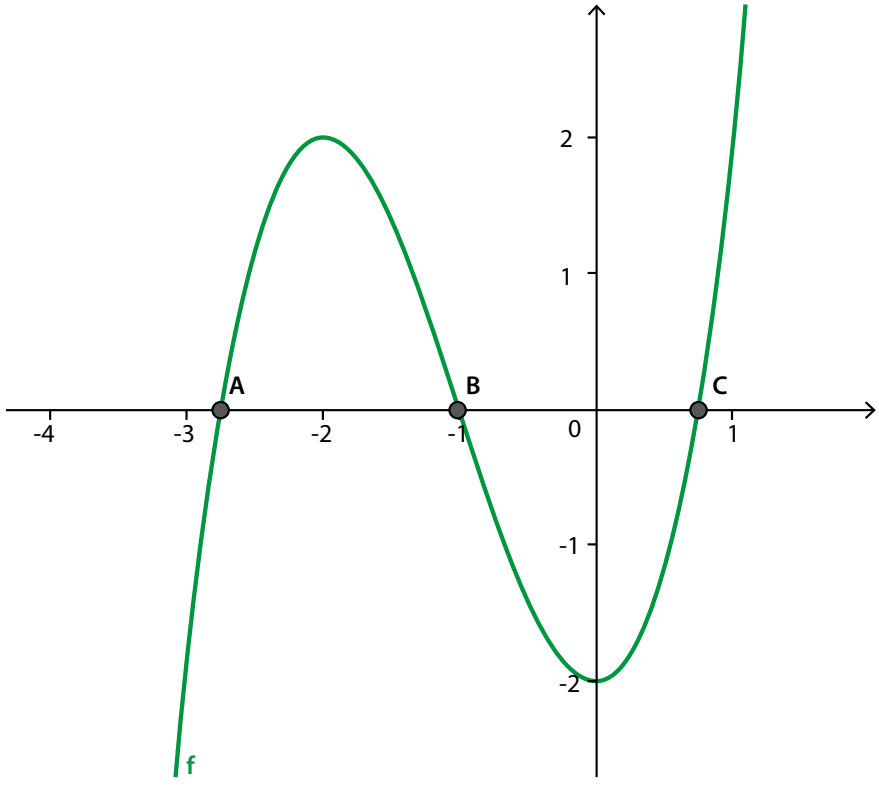


Figura 14 - Exemplo de função cúbica / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano, da função cúbica expressa por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Aplicaremos o método da bissecção para determinar a raiz localizada no ponto A com um erro menor ou igual a $0,2$. Analiticamente, podemos determinar os intervalos em que ocorre a mudança do sinal ao utilizar o processo de derivação da função. Vejamos:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Para localizar o ponto em que há mudança de sinal, é necessário igualar a derivada a zero e resolver a equação:

$$3x^2 + 6x = 0$$
$$3x \cdot (x + 2) = 0$$
$$3x = 0 \rightarrow x = 0$$
ou
$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

Interpretando o resultado obtido, temos que, para $x < -2$, teremos uma raiz, comparando com a representação gráfica, que seria o ponto A; no intervalo de $-2 < x < 0$, temos outra raiz, que, de acordo com o gráfico, seria o ponto B; e, para $x > 0$, temos a terceira raiz, que seria indicada, no gráfico, pelo ponto C. Com isso, podemos construir um quadro e analisar os intervalos para confirmar a ocorrência da mudança de sinal. Vejamos:

x	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$	Sinal da função
-4	$f(-4) = (-4)^3 + 3 \cdot (-4)^2 - 2 = -18$	-
-3	$f(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 2 = -2$	-
-2	$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 2 = 2$	+
-1	$f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 2 = 0$	Raiz da função
0	$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$	-
1	$f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 = 2$	+
2	$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 = 18$	+

Quadro 1 - Análise do sinal da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ / Fonte: a autora.

Analisando o quadro, podemos notar que houve troca de sinal entre os valores -3 e -2 e, também, entre 0 e 1. Nesses intervalos, temos as raízes da função, assim, devemos refinar esse intervalo, o que faremos por partes.

V. Intervalo $[-3,-2]$

Primeira iteração:

$$x_2 = \frac{-3-2}{2} = -2,5$$

Substituindo na função:

$$f(-2,5) = (-2,5)^3 + 3\cdot(-2,5)^2 - 2 = 1,125$$

Como o sinal é positivo, o novo intervalo será $[-3;-2,5]$.

Segunda iteração:

$$x_3 = \frac{-3-2,5}{2} = -2,75$$

Substituindo na função:

$$f(-2,75) = (-2,75)^3 + 3\cdot(-2,75)^2 - 2 = -0,109374999$$

Como o sinal é negativo, o novo intervalo será $[-2,75;-2,5]$.

Analisando o erro:

$$\varepsilon = |-2,5-(-2,75)| = 0,25$$

O erro é maior que o aceitável, assim, precisamos repetir o processo.

Terceira iteração:

$$x_4 = \frac{-2,75 - 2,5}{2} = -2,625$$

Substituindo na função:

$$f(-2,625) = (-2,625)^3 + 3 \cdot (-2,625)^2 - 2 = 0,583984375$$

Como o sinal é positivo, o novo intervalo será $[-2,75; -2,625]$.

Analisando o erro:

$$\varepsilon = |-2,625 - (-2,75)| = 0,125$$

O erro é menor que o aceitável, assim, podemos finalizar o processo, ou seja, a raiz dessa função, indicada, no gráfico, pelo ponto A, pertence ao intervalo $[-2,75; -2,625]$.

VI. Intervalo $[0,1]$

Primeira iteração:

$$x_2 = \frac{0+1}{2} = 0,5$$

Substituindo na função:

$$f(0,5) = (0,5)^3 + 3 \cdot (0,5)^2 - 2 = -1,125$$

Como o sinal é negativo, o novo intervalo será $[0,5; 1]$.

Segunda iteração:

$$x_3 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$$

Substituindo na função:

$$f(0,75) = (0,75)^3 + 3 \cdot (0,75)^2 - 2 = 0,109375$$

Como o sinal é positivo, o novo intervalo será $[0,75;1]$.

Analisando o erro:

$$\varepsilon = |1 - 0,75| = 0,25$$

O erro é maior que o aceitável, assim, precisamos repetir o processo.

Terceira iteração:

$$x_4 = \frac{0,75+1}{2} = 0,875$$

Substituindo na função:

$$f(0,875) = (0,875)^3 + 3 \cdot (0,875)^2 - 2 = 0,966796875$$

Como o sinal é positivo, o novo intervalo será $[0,875;1]$.

Analisando o erro:

$$\varepsilon = |1 - 0,875| = 0,125$$

O erro é menor que o aceitável, assim, podemos finalizar o processo, ou seja, a raiz dessa função, indicada, no gráfico, pelo ponto C, pertence ao intervalo $[0,875;1]$.

Outros métodos numéricos para determinação de zeros de funções também são aplicados, como, por exemplo, para cálculos numéricos de raízes da função $f(x) = \cos(x) - x^2$, representada pelo gráfico:

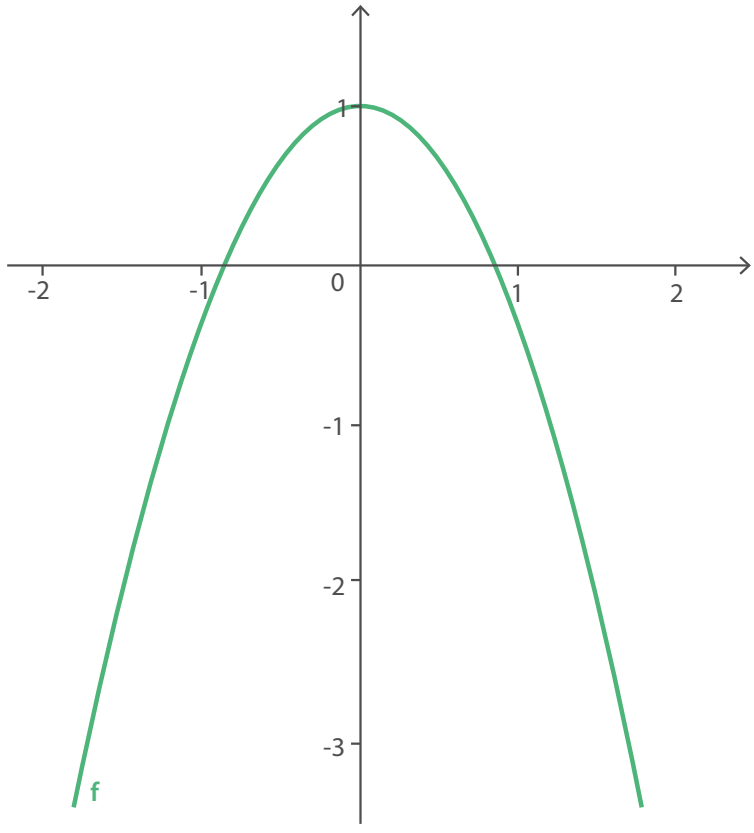


Figura 15 - Exemplo função / Fonte: a autora.

Descrição da imagem: ilustração, no plano cartesiano, da função expressa por $f(x) = \cos(x) - x^2$.

Pode ser aplicado o método de Newton-Raphson como estratégia para determinação dessas raízes, pois, mesmo tendo um gráfico de uma parábola, não se aplica a fórmula de resolução de equações de segundo grau para a função dada. Para aprofundar os seus conhecimentos sobre o assunto, acesse o QR Code e estude o material complementar.

Para o tratamento dos dados obtidos, podemos, primeiramente, recorrer à Estatística Descritiva como ferramenta de apuração dos dados de acordo com a finalidade de aplicação, podendo, por exemplo, utilizar a organização em tabelas e representações gráficas ou, ainda, uma análise das medidas de posição. Tanto para a análise numérica quanto para o tratamento de dados, podemos ter o auxílio computacional ou de calculadoras para os cálculos numéricos a fim de otimizar os resultados.

Participe da discussão sobre atividades em campo, em que o arquiteto precisa realizar a coleta e o tratamento de dados. Aperte o play, e vamos juntos!

Nos estudos relacionados ao Cálculo Numérico, são abordados diversos métodos para se obter resultados para os problemas, em geral, de ordem prática, em que a coleta de dados e os métodos de experimentação necessitam dessas técnicas para validação dos resultados. Em geral, são obtidos resultados aproximados, que possuem uma margem de erro, mas esses erros podem ser analisados, e se verifica se são aceitáveis.

Os conteúdos abordados nesta unidade podem ser aprofundados, visto que existem diversos outros conceitos relacionados ao exposto na unidade. Indicamos as seguintes obras para complementar seus estudos: *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*, dos autores Arenales e Darezzo (2008), e *Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*, dos autores Sperandio, Mendes e Silva (2003).

Suponha que você seja um(a) arquiteto(a) ou engenheiro(a) responsável pelo estudo do terreno em uma empresa que dá suporte para análises topográficas. Dentre suas funções, está a parte de coleta e o tratamento de informações. Há situações em que organizar os dados e realizar distribuições de frequências e medidas de posição, como moda, média e mediana, é o modo eficiente para obter os resultados. Em outros momentos, principalmente, em reuniões corporativas, a apresentação de tabelas e gráficos é a maneira mais eficiente para ilustrar os dados obtidos. No caso particular de uma visita técnica para o estudo de um terreno, foram colocadas as estacas e medidos os níveis do terreno. Após a coleta de dados, foram obtidos os seguintes resultados:

Estaca	Medida (cm)
1	199,99
2	200,01
3	199,87
4	199,08
5	200,09
6	200,01
7	199,91
8	199,95
9	200,03
10	200,06

Quadro 2 - Medições do terreno / Fonte: a autora.

Por ser um processo experimental, os erros são inerentes ao processo, e não podem, em muitos casos, ser evitados, entretanto, é preciso ter um controle desse tipo de erro para minimizar os processos posteriores que dependem desses dados. Considerando que um erro aceitável para as medidas obtidas refere-se a $| E_{abs} | \leq 0,01$, foram levantadas as seguintes questões:

a) Qual é o erro absoluto entre a medida considerada padrão de 200 cm e o valor obtido em cada uma das medições?
b) Qual é o intervalo de variação considerado aceitável para a medida obtida?
c) Quais medidas estão fora da margem de erro aceitável?

Primeiramente, podemos complementar o quadro inicial para responder à primeira questão a respeito do erro absoluto.

Estaca	Medida (cm)	Erro absoluto
1	199,99	0,01
2	200,01	0,01
3	199,87	0,13
4	199,08	0,92
5	200,09	0,09
6	200,01	0,01
7	199,91	0,09
8	199,95	0,05
9	200,03	0,03
10	200,06	0,06

Quadro 3 - Erro absoluto das medições do terreno / Fonte: a autora.

Temos que o erro aceitável é de $|E_{abs}| \leq 0,01$, assim, a variação refere-se a 0,01 em torno do valor central de 200 cm, ou seja, $200 - 0,01 < x < 200 + 0,01$, ou seja, a medida deve pertencer ao intervalo construído para termos, assim, um erro aceitável. Todavia, se a medição não pertencer ao intervalo, tem-se que refazer a medição desse intervalo. Dessa forma, será preciso medir, novamente, o intervalo das estacas 3, 4, 5, 7, 8, 9 e 10 para não comprometer cálculos futuros.

A partir do termo central "tratamento de informação", podemos produzir um mapa mental, estabelecendo relações com os métodos aplicados em cada situação. Utilize as palavras-chaves como referência, conforme ilustrado a seguir.

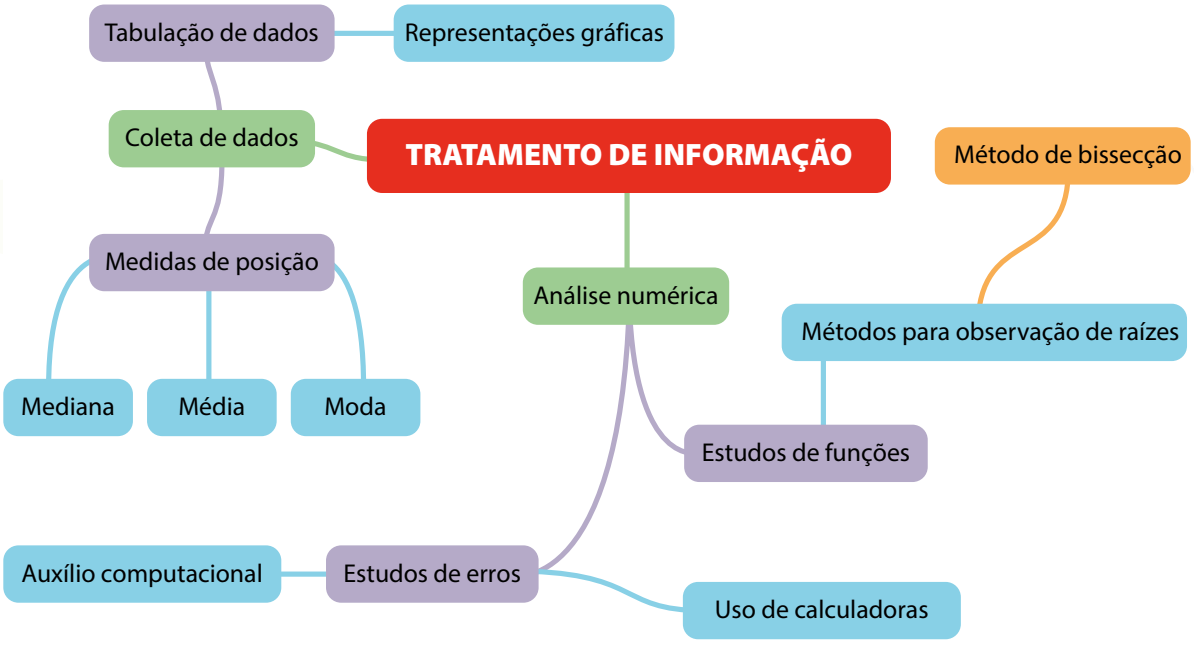


Figura 16 - Mapa mental sobre tratamento de informação / Fonte: a autora.

A partir disso, complemente com as suas anotações de cada tópico abordado nessa unidade, coloque imagens e infográficos para auxiliar no processo. Para desenvolver essa atividade, recomendamos que utilize a ferramenta de criação de mapa mental gratuitamente disponibilizada em https://www.goconqr.com/.

MAPA MENTAL

1. Você, enquanto arquiteto(a) responsável pelos estudos iniciais de um projeto urbanístico, foi encarregado(a) de realizar um levantamento sobre a implantação de um parque público em um área de fundo de vale. Para isso, foram entrevistadas 1000 pessoas em uma enquete pública, sendo que elas precisavam definir qual seriam as diretrizes de projeto. Os entrevistados foram organizados de acordo com a idade, conforme a tabela a seguir.

Idade	Frequência	Frequência percentual
10 ⊢ 20	80	8%
20 ⊢ 30	200	20%
30 ⊢ 40	150	15%
40 ⊢ 50	150	15%
50 ⊢ 60	100	10%
60 ⊢ 70	220	22%
70 ⊢ 80	100	10%

Tabela 4 - Dados fictícios / Fonte: a autora.

A partir dos dados apresentados, utilize a frequência para construir um gráfico de colunas ou barras e a frequência percentual para construir um gráfico de setores.

2. Em uma medição linear de uma estrada a ser construída, mediu-se o valor de 8,756 Km. Em uma análise plano altimétrica, constatou-se que a medida real para a situação seria de 8,957 Km. O erro absoluto da medição é de:

a) 199 metros.
b) 200 metros.
c) 201 metros.
d) 203 metros.
e) 204 metros.

3. No tratamento de informação, podemos recorrer a ferramentas da Geometria Descritiva e, também, ao cálculo numérico. Com base nisso, analise as afirmações a seguir.

   I) Ao analisar os dados coletados em experimentos práticos, como, por exemplo, a resistências de materiais, podemos ter a necessidade de estimar valores de posição, como moda, média e mediana.

   II) Ao utilizar recursos computacionais e calculadoras para desenvolver uma análise numérica de dados, sempre é possível representá-la no sistema decimal de numeração.

   III) Ao analisar os diversos tipos de funções e suas representações gráficas, sempre é possível determinar uma solução analítica.

   Assinale a alternativa que corresponde ao julgamento das afirmações.

   a) Apenas II e III são corretas.
   b) Apenas I e II são corretas.
   c) Apenas I e III são corretas.
   d) Apenas I é correta.
   e) Apenas III é correta.

CONFIRA SUAS RESPOSTAS

Noções de cálculo numérico: interpolação, ajuste de curvas e integração numérica

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, daremos continuidade aos estudos relacionados aos métodos numéricos para análise de dados e funções, considerando que essas são ferramentas para tratamento de informação. Realizamos um estudo sobre interpolação por meio de resolução de sistemas de equações e pela Forma de Newton, além de tratar sobre o ajuste de curvas por meio do método dos mínimos quadrados. Complementamos o tópico sobre integração envolvendo áreas ao apresentar um método numérico em que é possível realizar o cálculo de áreas de modo experimental. Os conceitos e as propriedades estudados nesta unidade são bastante aplicados na Arquitetura e nas Engenharias como, também, em outras áreas, como Administração e Economia, por exemplo, pois possibilita a análise de dados e tomadas de decisões. Bons estudos!

Um(a) profissional que atua com levantamentos para estudos preliminares pode precisar estabelecer parâmetros de análises, principalmente, quando atua em campo e colhe dados experimentais. Diante desse contexto, conhecer ferramentas que auxiliam e agilizam o tratamento de informações é uma competência relevante para um(a) futuro(a) profissional.

Suponha que você atue em um escritório que presta serviços para órgãos públicos na área de Urbanismo, e sua função é realizar o levantamento de informações relevantes para estudos preliminares. Seu trabalho atual consiste em tecer considerações sobre Diretrizes dos Órgãos Nacionais de Trânsito e Transportes Sistema Viário e Trânsito Urbano e Engenharia e Projetos de Tráfego para um estudo de mobilidade urbano de uma região metropolitana. Vejamos um exemplo de tráfego urbano:

Figura 1 - Exemplo de tráfego urbano

Descrição da Imagem: fotografia de uma pista exclusiva para ônibus, outra faixa para veículos e uma ciclovia.

Considerando as questões relacionadas às políticas nacionais de mobilidade urbana sustentável e a política nacional de trânsito, além da coleta de dados experimentais em campo, como realizar esse estudo?

Em uma região urbana, a circulação viária é um tópico relevante para estruturação da cidade, sendo relacionada com questões de acessibilidade, transporte público, estacionamento, além da sobrevivência social e econômica de uma região. Assim, é preciso elaborar um plano de ações para o planejamento urbano quando se trata do estudo de intervenções urbanísticas que impactam a cidade como um todo.

Considerando o tráfego urbano, são aplicados diferentes usos, como a circulação de veículos, como carros privativos, táxis, transporte coletivo, transporte de carga, ciclistas e pedestres. Desse modo, há a necessidade da integração viária e intermodal para atender à demanda existente de circulação. Para estudos dessa natureza, é preciso, por exemplo, verificar o fluxo de veículo em determinados horários em vias arteriais; fazer entrevistas de opinião para analisar a opinião de uma população local; entre outras coletas de dados.

Quando é preciso realizar um estudo preliminar, principalmente, de projetos urbanísticos, pode ser necessário estabelecer estimativas para fazer projeções futuras, de modo a auxiliar na tomada de decisões e estabelecer, por exemplo, a determinação de diretrizes projetuais. Diante desse contexto, quais são os métodos que possibilitam realizar estimativas e aproximações, que você conhece, utilizando como base um método científico que possibilite a tomada de decisões?

Há situações cotidianas, principalmente, relacionadas com levantamentos bibliográficos e pesquisa em campo, em que é preciso fazer o estudo da função, mas ela possui uma lei de formação complexa para sua análise, dessa forma, podemos estudar o valor aproximado dessa função. Um dos métodos consiste na interpolação ou, ainda, se houver a coleta de dados, pode ser viável realizar o ajuste de curvas. Em ambos os casos, recorremos a métodos numéricos de análises que subsidiam tomadas de decisões.

Anote em seu Diário de Bordo: a partir de seus conhecimentos prévios, como você acredita que devem ser feitos esses levantamentos?

DIÁRIO DE BORDO

A interpolação consiste em um método do calculo numérico que auxilia no estudo de funções e na análise de dados, sendo uma ferramenta relevante para a resolução de problemas. Pode ser do tipo linear, quadrática ou, ainda, polinomial, sendo um recurso para obter estimativas a partir de parâmetros pré-estabelecidos.

Na interpolação, utilizamos um conjunto de dados ou uma função em que são selecionados dois pares ordenados para obter uma função linear que interpole os pontos escolhidos. Vejamos a definição desse conceito.

Dados dois pares ordenados (x_0, y_0) e (x_1, y_1) de uma função $f(x)$, considere (x, y), sendo que $x_0 < x < x_1$ e $y_0 < y < y_1$, de modo que $y = p(x)$, e $p(x) = a_1 x + a_0$ é o polinômio interpolador de grau 1 da $f(x)$.

O gráfico do polinômio interpolador de grau 1 corresponde à estrutura de uma função de primeiro grau, dessa forma, será representado por uma reta. O grau do polinômio interpolador é uma unidade a menos da quantidade de dados utilizados. Como foram considerados dois pontos, o grau do polinômio será 1, que, para esse caso, resulta em um gráfico de uma função de primeiro grau, e o denominaremos de interpolação linear.

Para determinar o polinômio interpolador, é preciso resolver um sistema de equações de duas variáveis para obter os coeficientes desse polinômio, de modo que:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$$

No sistema indicado, os coeficientes a_0 e a_1 são desconhecidos, ou seja, são as incógnitas desse sistema de equações. Se o sistema possui, solução é possível determinar o polinômio interpolador.

Analisemos um exemplo para compreender como é aplicada a interpolação em uma função. Dada a função $f(x) = sen(x) + x + 1$, representada pelo gráfico a seguir:

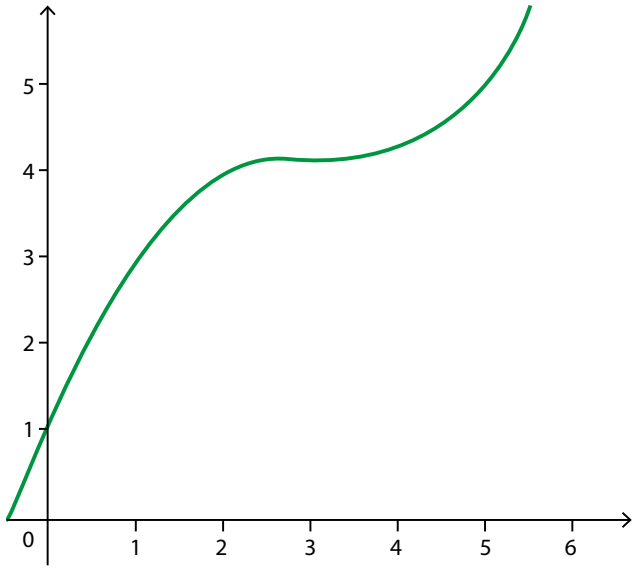


Figura 2 - Representação da função $f(x) = sen(x) + x + 1$ / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano, da função que possui parte trigonométrica e parte polinomial, dada por $f(x) = sen(x) + x + 1$.

Adote os pares ordenados A $(0,1)$ e B $(2,5;4,1)$ pertencentes a essa função. Determinaremos o polinômio linear que interpola esses pontos. Primeiramente, vejamos a representação gráfica dessa interpolação:

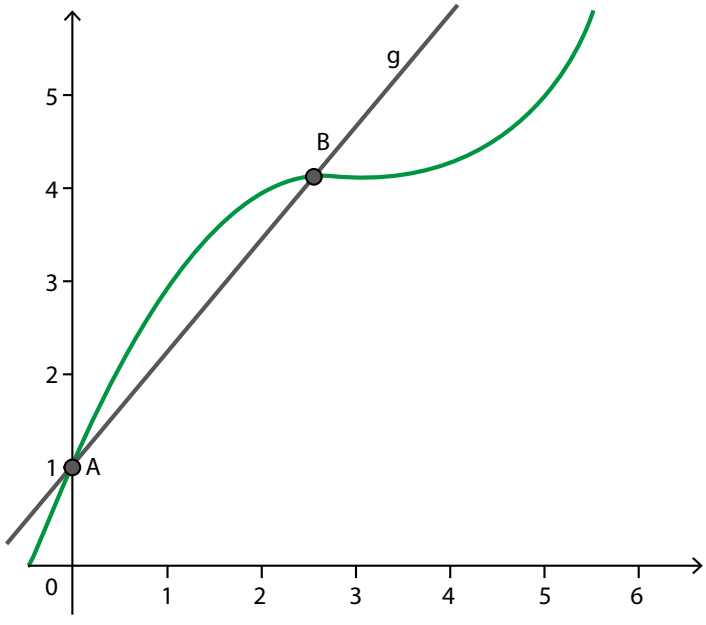


Figura 3 - Representação da função $f(x) = sen(x) + x + 1$, com interpolação nos pontos A e B / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano, da função que possui parte trigonométrica e parte polinomial, dada por $f(x) = sen(x) + x + 1$, com interpolação nos pontos A e B.

Nesse caso, podemos utilizamos o software GeoGebra, disponível no QR Code, para inserir os dados, ou seja, a função e os pontos selecionados. Ao utilizar a ferramenta para traçar reta por dois pontos, o software já fornece a equação dela. Vejamos:

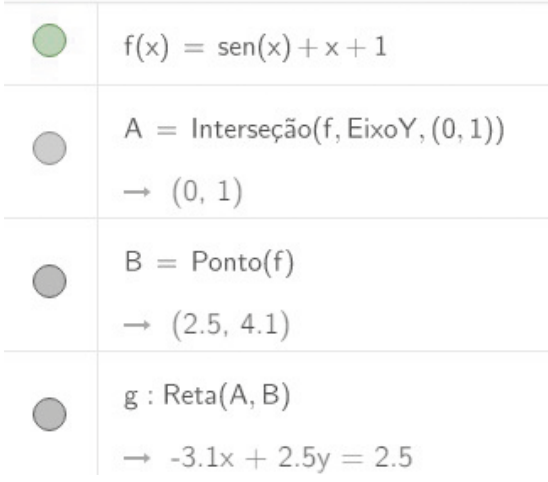


Figura 4 - Representação da função $f(x) = sen(x) + x + 1$, com interpolação nos pontos A e B, feita no GeoGebra
Fonte: a autora.

Descrição da imagem: ilustração da janela de álgebra da função, no plano cartesiano, que possui parte trigonométrica e parte polinomial dada por $f(x) = sen(x) + x + 1$, com interpolação nos pontos A e B no GeoGebra.

Podemos isolar o y e, com isso, obter o polinômio interpolador, ou seja,

$$-3,1x + 2,5y = 2,5$$
$$2,5y = 2,5 + 3,1x$$
$$y = \frac{2,5 + 3,1x}{2,5}$$
$$y = 1 + 1,24x$$

Associando à estrutura $p(x) = a_1 x + a_0$, temos que $a_1 = 1,24$ e $a_0 = 1$, ou seja, $p(x) = 1,24x + 1$.

Outra forma de resolver é recorrendo à resolução do sistema linear dos dados do enunciado. Temos que $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$, $x_0 = 2,5$ e $y_0 = 4,1$. Substituindo no sistema, temos:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot 0 + a_0 = 1 \\ a_1 \cdot 2,5 + a_0 = 4,1 \end{cases}$$

Da primeira linha do sistema de equação, podemos deduzir que $a_0 = 1$, substituímos esse valor na segunda equação do sistema e temos que:

$$a_1 \cdot 2,5 + 1 = 4,1$$
$$2,5 \cdot a_1 = 4,1 - 1$$
$$2,5 \cdot a_1 = 3,1$$
$$a_1 = \frac{3,1}{2,5}$$
$$a_1 = 1,24$$

Determinamos que $a_1 = 1,24$ e $a_0 = 1$, ou seja, $p(x) = 1,24x + 1$.

Para a resolução de sistemas de equações, podemos utilizar calculadoras on-line, nas quais inserimos os dados do sistema, e nos é fornecido a solução. Acesse o QR Code para realizar o cálculo do sistema linear anterior.

Utilizando a calculadora, você obterá a seguinte entrada de dados, conforme a Figura 5:

Figura 5 - Calculadora de sistema de equações / Fonte: Matrix Calculator ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para a resolução de sistemas de equações.

Para o sistema $\begin{cases} a_1 \cdot 0 + a_0 = 1 \\ a_1 \cdot 2,5 + a_0 = 4,1 \end{cases}$, digitaremos as seguintes entradas:

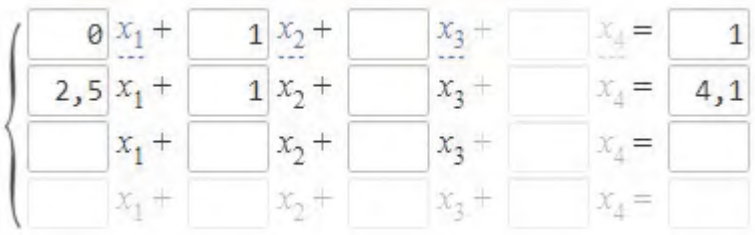
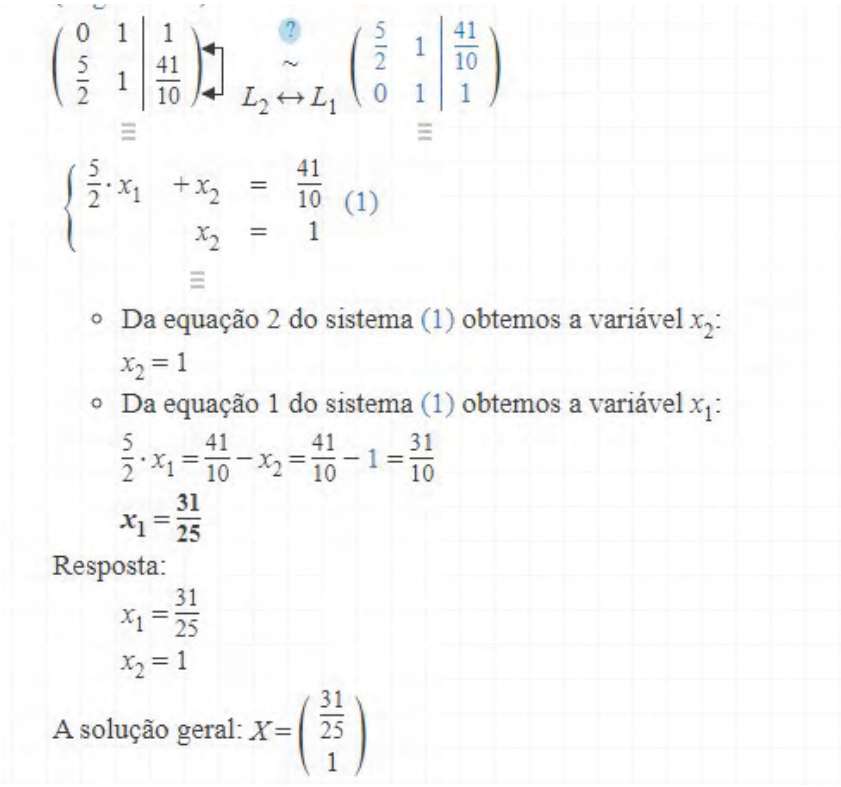


Figura 6 - Calculadora de sistema de equações com inserção dos dados / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações com inserção dos dados.

Selecionamos o Método de Gauss como opção de resolução:



$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{41}{10} \end{array}\right) \sim L_2 \leftrightarrow L_1 \left(\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & 1 & \frac{41}{10} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2} \cdot x_1 + x_2 = \frac{41}{10} & (1) \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável x_2:

  $x_2 = 1$

- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável x_1:

  $\frac{5}{2} \cdot x_1 = \frac{41}{10} - x_2 = \frac{41}{10} - 1 = \frac{31}{10}$

  $\boldsymbol{x_1 = \frac{31}{25}}$

Resposta:

$x_1 = \frac{31}{25}$

$x_2 = 1$

A solução geral: $X = \left(\begin{array}{c} \frac{31}{25} \\ 1 \end{array}\right)$

Figura 7 - Calculadora de sistema de equações com resolução pelo Método de Gauss / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações pelo Método de Gauss.

Foi dada a solução do sistema, dessa forma, é preciso associar que o $x_1 = a_1$ e $x_2 = a_0$, e podemos concluir que $p(x) = 1,24x + 1$.

Analisando a representação gráfica anterior da interpolação de $p(x) = 1,24x + 1$ à função $f(x) = sen(x) + x + 1$, podemos observar que existe uma margem de erro ao realizar o processo numérico, chamado de erro de truncamento (E_T), que pode ser obtido por meio da expressão:

$$E_T(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{f''(\varepsilon)}{2}$$

Em que:

I. Os pares ordenados (x_0, y_0) e (x_1, y_1) de uma função $f(x)$ e $x_0 < x < x_1$.

II. $f''(\varepsilon)$: derivada de segunda ordem para função interpolada.

Por meio da expressão anterior, é possível determinar o erro máximo aceitável, dado por:

$$\left|E_T(x)\right| \leq \left|(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\frac{f''(\varepsilon)}{2}\right|$$

A interpretação do erro é que o valor real de x é o valor obtido pela $f(x)$, já o valor aproximado é dado pelo polinômio $p(x)$, sendo que a diferença do valor real e do valor aproximado será o erro da interpolação. Ao comparar com a cota máxima de erro de truncamento, pode-se validar ou não a interpolação.

Vimos alguns métodos para determinar a equação da reta que passa por dois pontos e que possibilita a obtenção do polinômio interpolador, mas existem outras formas? Acesse o QR Code, estude os tópicos de Geometria Analítica sobre retas e funções lineares e aprofunde seus conhecimentos.

Além da interpolação de uma função por meio de um polinômio linear, podemos realizá-la por meio de uma interpolação quadrática, dependerá do comportamento da função ou da análise do erro quando já interpolado por meio de uma função linear. Nesse caso, o polinômio de segundo grau é dado por:

Dados três pares ordenados: (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de uma função $f(x)$, de modo que $y = p(x)$, e $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ é o polinômio interpolador de grau 2 da $f(x)$.

Para determinação do polinômio interpolador, é preciso resolver o sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{cases} a_2 x_0 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Em que as incógnitas são os coeficientes a_0, a_1 e a_2. Vejamos, a seguir, um exemplo de aplicação para a interpolação polinomial.

Considere que, em um estudo de conforto térmico para um projeto arquitetônico, foi preciso coletar as temperaturas de calor específico da água no local de execução do projeto, de modo que os dados obtidos foram:

Temperatura (°C)	Calor específico
20	0,99907
25	0,99852
30	0,99826
35	0,99818
40	0,99828
45	0,99849
50	0,99878

Tabela 1 - Coleta de dados de temperatura e calor específico da água / Fonte: adaptada de Ruggiero e Lopes (1988).

Para os seus estudos, você verificou que é preciso estimar o calor específico da água a 32,5 °C. Desse modo, foram inseridos os dados em uma planilha eletrônica, e gerou-se o seguinte gráfico:

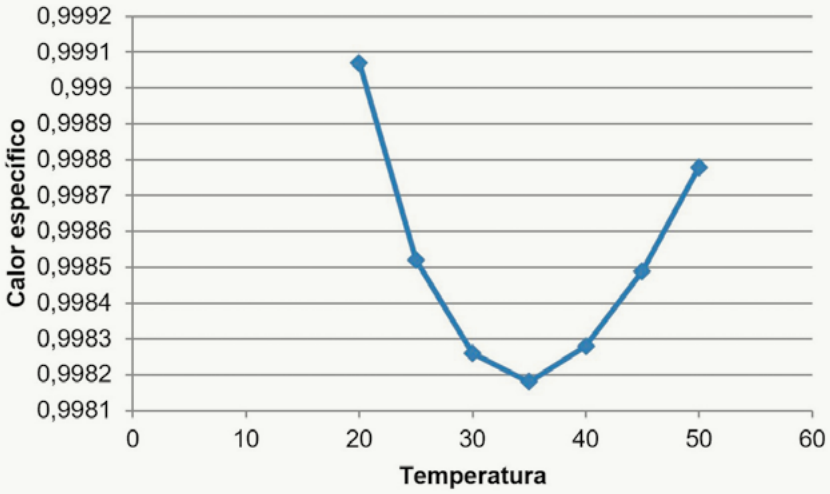


Figura 8 - Gráfico representativo dos dados de temperatura e calor específico da água / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um gráfico em que os pontos formam uma parábola e que foi obtido por meio de planilha eletrônica.

Observou-se que o comportamento é de uma função quadrática, dessa forma, optou-se por construir um polinômio quadrático $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ para realizar a estimativa. Foram escolhidos os seguintes pontos para compor a interpolação:

I. $(x_0, y_0) = (20; 0,9991)$

II. $(x_1, y_1) = (35; 0,9982)$

III. $(x_2, y_2) = (50; 0,9988)$

É preciso substituir os valores no sistema de equação a seguir:

$$\begin{cases} a_2x_0 + a_1x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2x_1 + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2x_2 + a_1x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Em que:

$$\begin{cases} a_2 20^2 + a_1 20 + a_0 = 0,9991 \\ a_2 35^2 + a_1 35 + a_0 = 0,9982 \\ a_2 50^2 + a_1 50 + a_0 = 0,9988 \end{cases}$$

Resolvendo a potenciação em cada equação e indicando os termos desconhecidos, reorganizando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 400a_2 + 20a_1 + a_0 = 0,9991 \\ 1225a_2 + 35a_1 + a_0 = 0,9982 \\ 2500a_2 + 50a_1 + a_0 = 0,9988 \end{cases}$$

Utilizaremos a calculadora on-line para a resolução de sistemas de equações lineares, inserindo os dados, temos:

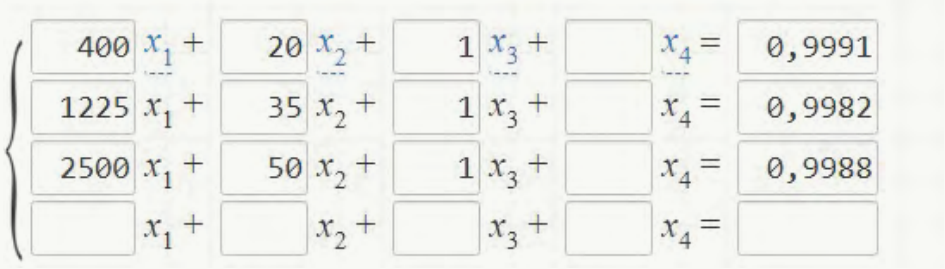


Figura 9 - Calculadora de sistema de equações com inserção dos dados Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de uma calculadora on-line para resolução de sistemas de equações com inserção dos dados.

Solicitando a resolução pelo Método de Gauss, temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{400} & 20 & 1 & \frac{9991}{10000} \\ 1225 & 35 & 1 & \frac{4991}{5000} \\ 2500 & 50 & 1 & \frac{2497}{2500} \end{array}\right) \times\left(\frac{-49}{16}\right) \quad \overset{?}{\sim} \quad L_2-\left(\frac{49}{16}\right)\cdot L_1 \to L_2$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{400} & 20 & 1 & \frac{9991}{10000} \\ 0 & \frac{-105}{4} & \frac{-33}{16} & \frac{-329847}{160000} \\ 2500 & 50 & 1 & \frac{2497}{2500} \end{array}\right) \times\left(\frac{-25}{4}\right) \quad \overset{?}{\sim} \quad L_3-\left(\frac{25}{4}\right)\cdot L_1 \to L_3$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 400 & 20 & 1 & \frac{9991}{10000} \\ 0 & \mathbf{\frac{-105}{4}} & \frac{-33}{16} & \frac{-329847}{160000} \\ 0 & -75 & \frac{-21}{4} & \frac{-209823}{40000} \end{array}\right) \times\left(\frac{-20}{7}\right) \quad \overset{?}{\sim} \quad L_3-\left(\frac{20}{7}\right)\cdot L_2 \to L_3$$

$$\equiv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 400 & 20 & 1 & \frac{9991}{10000} \\ 0 & \frac{-105}{4} & \frac{-33}{16} & \frac{-329847}{160000} \\ 0 & 0 & \frac{9}{14} & \frac{12891}{20000} \end{array}\right)$$

$$\equiv$$

$$\begin{cases} 400\cdot x_1 + 20\cdot x_2 + x_3 = \frac{9991}{10000} \\ \frac{-105}{4}\cdot x_2 - \frac{33}{16}\cdot x_3 = \frac{-329847}{160000} \\ \frac{9}{14}\cdot x_3 = \frac{12891}{20000} \end{cases} \quad (1)$$

$$=$$

- Da equação 3 do sistema (1) obtemos a variável x_3:

$$\frac{9}{14}\cdot x_3 = \frac{12891}{20000}$$

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{30079}{30000}}$$

- Da equação 2 do sistema (1) obtemos a variável x_2:

$$\frac{-105}{4}\cdot x_2 = \frac{-329847}{160000} + \frac{33}{16}\cdot x_3 = \frac{-329847}{160000} + \frac{33}{16}\cdot\left(\frac{30079}{30000}\right) = \frac{511}{80000}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{-73}{300000}}$$

- Da equação 1 do sistema (1) obtemos a variável x_1:

$$400x_1 = \frac{9991}{10000} - 20x_2 - x_3 = \frac{9991}{10000} - 20\cdot\left(\frac{-73}{300000}\right) - \frac{30079}{30000} = \frac{1}{750}$$

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{300000}}$$

Resposta:

$$x_1 = \frac{1}{300000}$$

$$x_2 = \frac{-73}{300000}$$

$$x_3 = \frac{30079}{30000}$$

Figura 10 - Calculadora de sistema de equações com resolução pelo Método de Gauss / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de calculadora on-line para resolução de sistemas de equações pelo Método de Gauss.

Os valores obtidos são $x_1 = a_2 = \frac{1}{300000}$, $x_2 = a_1 = -\frac{73}{300000}$ e $x_3 = a_0 = \frac{30079}{30000}$, dessa forma, o polinômio quadrático é dado por: $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \rightarrow p(x) = \frac{x^2}{300000} - \frac{73}{300000}x + \frac{30079}{30000}$.

Ao realizar a estimativa para a temperatura de 32,5 °C, temos que:

$$p(x) = \frac{x^2}{300000} - \frac{73}{300000}x + \frac{30079}{30000}$$
$$p(32,5) = \frac{(32,5)^2}{300000} - \frac{73}{300000} \cdot 32,5 + \frac{30079}{30000}$$
$$p(32,5) = \frac{1056,25}{300000} - \frac{2372,5}{300000} + \frac{30079}{30000}$$
$$p(32,5) = 0,998245833$$

Considerando as primeiras cinco casas decimais, temos que o calor específico é estimado em $0,99825$ para 32,5 °C.

Participe da discussão sobre o uso de estimativas na análise de dados de coletas de informações e suas aplicações na Arquitetura. Aperte o play, e vamos juntos!

Podemos generalizar o método de interpolação linear e quadrático apresentado anteriormente. De modo geral, podemos aplicar a interpolação para a aproximação de resultados de uma função $f(x)$ por um polinômio $p(x)$, que pode ser utilizado para estimar valores por meio dos dados conhecidos. Para isso, é preciso associar os dados conforme a tabela a seguir:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
⋮	⋮
x_n	$f(x_n)$

Tabela 2 - Dados para interpolação / Fonte: a autora.

...

É preciso interpolar uma função $f(x)$ a partir dos pontos obtidos na tabela para se alcançar um polinômio *g(x)*, de modo que:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

De modo geral, podemos expressar a interpolação polinomial por meio de:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Em que:

$f(x_k) = p_n(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n$

Para determinar o polinômio, será preciso solucionar o sistema indicado por:

$$\begin{aligned} a_o + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots . a_n x_1^n &= f(x_1) \\ a_o + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots . a_n x_2^n &= f(x_2) \\ &\vdots \\ a_o + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots a_n x_n^n &= f(x_n) \end{aligned}$$

Em que:

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$: incógnitas do sistema.

No cálculo de um polinômio interpolador, por meio da resolução de sistemas de equações, é recomendado que os pontos usados sejam igualmente espaçados ou que os valores das abscissas estejam necessariamente em ordem crescente.

Há outra forma de se obter o polinômio interpolador além de resolver um sistema de equações? Sim, pela Interpolação Polinomial de Lagrange, que se trata de um método de interpolação. Acesse o QR Code, estude e aprofunde seus conhecimentos sobre esse método.

Além da resolução por meio de sistemas de equações lineares, podemos obter um polinômio por meio da Interpolação Polinomial de Newton. A expressão da forma de Newton é indicada por:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots\ldots + d_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Em que:

$$d_0 = f[x_0] = f(x_0)$$
$$d_1 = f[x_1, x_0]$$
$$d_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$\vdots$$
$$d_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_2, x_1, x_0]$$

Os termos indicados entre colchetes são chamados de diferenças divididas e são definidas por:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l] = \frac{f[x_i, x_j, x_k] - f[x_j, x_k, x_l]}{x_i - x_l}$$

$$\vdots$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

A partir disso, o polinômio interpolador é obtido por meio de:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + ... + \\ + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1, x_0]$$

A aplicação desse método pode ser auxiliada por meio de planilhas eletrônicas, de modo a facilitar os cálculos e agilizando o processo. Ilustraremos as entradas que serão inseridas na planilha até a ordem 4, vejamos:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_1, x_0]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_2, x_1, x_0]$		
		$f[x_2, x_1]$		$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_3, x_2, x_1]$		$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$
		$f[x_3, x_2]$		$f[x_4, x_3, x_2, x_1]$	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_4, x_3, x_2]$		
		$f[x_4, x_3]$			
x_4	$f[x_4]$				

Quadro 1 - Dados para o cálculo do Método de Newton para interpolação Fonte: a autora.

Vejamos um exemplo de aplicação do método. Considere os dados da tabela a seguir:

x	$f(x)$
-1	4
0	1
2	-1

Tabela 3 - Dados para interpolação / Fonte: adaptada de Ruggiero e Lopes (1988).

Precisamos obter o polinômio que atende à seguinte estrutura:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Calculando as diferenças divididas, temos:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1-4}{0-(-1)} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-(-3)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

Organizando os dados na tabela de ordem 2, temos:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		-1	
2	-1		

Tabela 4 - Dados para o cálculo pelo Método de Newton para interpolação / Fonte: adaptada de Ruggiero e Lopes (1988).

Retomando o polinômio e inserindo os dados obtidos, temos:

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 4 - 3(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)(x)$$

$$P_2(x) = 4 - 3(x+1) + \frac{2}{3}(x^2 + x)$$

$$P_2(x) = 4 - 3x - 3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Dessa forma, obtemos o polinômio interpolador de acordo com os dados fornecidos. Vejamos um outro exemplo de aplicação:

Segundo a NBR 5410 (ABNT, 2004), em uma instalação de rede elétrica, os condutores a serem instalados precisam aplicar fatores de correção por temperaturas ambiente para linhas não subterrâneas, dependendo do tipo de isolação, considere os fatores de correção da tabela a seguir.

Temperatura ()	PVC
10^{o}	1,22
20^{o}	1,12
35^{o}	0,94

Tabela 5 - Dados para interpolação / Fonte: adaptada de ABNT (2004).

Com base nisso, determine o fator de correção para a isolação de PVC para uma temperatura de 30^{o}.

Ao aplicar a interpolação dos pontos dados, por meio do polinômio interpolador, podemos obter o fator de correção. Utilizaremos a forma de Newton como estratégia de resolução. Inicialmente, aplicamos o operador de diferenças divididas. Ao calcular as diferenças divididas, temos:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1,12 - 1,22}{20 - 10} = \frac{-0,1}{10} = -0,01$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0,94 - 1,12}{35 - 20} = \frac{-0,18}{15} = -0,012$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{-0,012 - (-0,01)}{35 - 10} = -0,00008$$

Tabulando os dados, temos:

x	0	1	2
10	1,22		
		-0,01	
20	1,12		-0,00008
		-0,012	
35	0,94		

Tabela 6 - Dados para o cálculo pelo Método de Newton para interpolação / Fonte: a autora.

Temos que $d_0 = 1,22$, $d_1 = -0,005$ e $d_2 = -0,00008$, dessa forma, substituiremos os valores na fórmula de interpolação de Newton:

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0) \cdot (x - x_1)$$
$$p(x) = 1,22 - 0,005 \cdot (x - 10) - 0,00008 \cdot (x - 10) \cdot (x - 20)$$
$$p(x) = 1,22 - 0,005x + 0,05 - 0,00008 \cdot (x^2 - 20x - 10x + 200)$$
$$p(x) = 1,27 - 0,005x - 0,00008 \cdot (x^2 - 30x + 200)$$
$$p(x) = 1,27 - 0,005x - 0,00008x^2 + 0,0024x - 0,016$$
$$p(x) = 1,254 - 0,0026x - 0,00008x^2$$

Para estimar qual deve ser o fator de correção para 18º, realizamos:

$$p(x) = 1,254 - 0,0026x - 0,00008x^2$$
$$p(30) = 1,254 - 0,0026 \cdot 30 - 0,00008 \cdot 30^2$$
$$p(30) = 1,254 - 0,078 - 0,072$$
$$p(30) = 1,254 - 0,15$$
$$p(30) = 1,104$$

Logo, o fator de correção para a temperatura de será de 1,104.

Existem situações em que precisamos avaliar um ponto não pertencente ao intervalo de dados. Quando isso ocorre, é necessário determinar uma função que exceda esses dados. O procedimento numérico que estudaremos nesse caso é o ajuste de curvas por meio do método dos mínimos quadrados. Essa forma de tratamento de dados possibilita que se tenha uma margem de erro aceitável para a análise de dados não tabelados. Para tanto, é preciso ajustar uma curva que seja adequada aos dados disponibilizados. Construindo uma função para esses dados, podemos calcular valores não pertencentes aos dados iniciais. Vejamos um exemplo de coleta de dados para ilustrar o método:

x	$f(x)$
1,2	2,1
3,3	4,1
5,1	3,9
6,7	6,2
8,1	5,9

Tabela 7 - Dados para ajuste de curvas Fonte: a autora.

Esses dados podem ser expressos em um gráfico de dispersão. Vejamos:

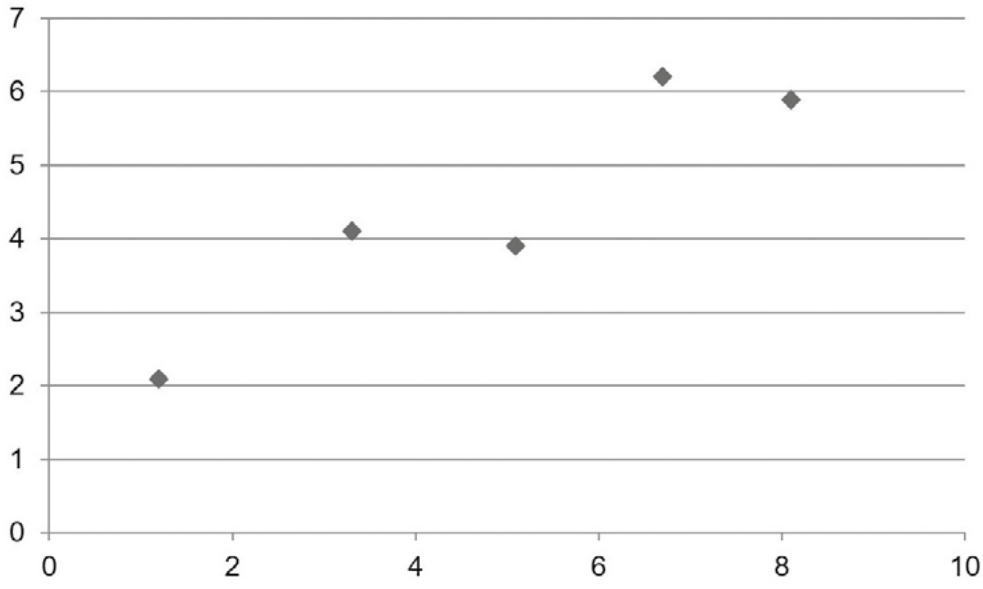


Figura 11 - Gráfico de dispersão dos dados da Tabela 5 / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração do gráfico de dispersão com os dados inseridos em planilha eletrônica.

Para realizar estimativas a partir dessa coleta de dados, é preciso construir uma função que possua um bom ajuste aos dados coletados. Para os dados expressos no gráfico, podemos considerar que uma função linear seria adequada para os dados, assim, é possível estabelecer uma lei de formação para fazer projeções de outros valores. Na sequência, definimos o processo de ajustes de curvas para esse tipo de situação problema. Temos que definir uma função, tal que:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Adotando $k = 1, 2, 3, \ldots, m$, tal que m seja a quantidade de dados coletados. Temos que calcular o menor desvio possível da reta para esses pontos, isto é, a distância dos pontos iniciais até a reta, que é dada por:

$$d_k = f(x_k) - \phi(x_k)$$

De modo que o somatório desses desvios seja dado por:

$$\sum_{k=1}^{m}|d_k|$$

Considerando que os valores do somatório indicados anteriormente podem ser positivos ou negativos, é preciso aplicar o módulo. Adequando essa estrutura para o tratamento de dados, temos:

$$D=\sum_{k=1}^{m}{d_k}^2=\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k)-\phi(x_k)\right]^2$$

No caso do exemplo apresentado, teríamos o ajuste por uma reta dada por:

$$\phi(x)=\alpha_1+\alpha_2 x$$

Ao substituir na equação dos desvios ao quadrado, temos que:

$$D=\sum_{k=1}^{m}{d_k}^2=\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k)-\phi(x_k)\right]^2=\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k)-\left(\alpha_1+\alpha_2 x_k\right)\right]^2=F\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$$

Utilizando derivadas e manipulações algébricas, o procedimento numérico pode ser determinado por:

$$m\alpha_1+(\sum_{k=1}^{m}x_k)\alpha_2=\sum_{k=1}^{m}f(x_k)$$

$$(\sum_{k=1}^{m}x_k)\alpha_1+(\sum_{k=1}^{m}{x_k}^2)\alpha_2=\sum_{k=1}^{m}x_k f(x_k)$$

As expressões apresentadas são denominadas equações normais e são elas que possibilitam a obtenção da função, que seria o ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados. Vejamos a aplicação no exemplo anterior.

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 1,2 + 3,3 + 5,1 + 6,7 + 8,1 = 24,2$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k) = 2,1 + 4,1 + 3,9 + 6,2 + 5,9 = 22,2$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = (1,2)^2 + (3,3)^2 + (5,1)^2 + (6,7)^2 + (8,1)^2 = 148,84$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k f(x_k) = (1,2)\cdot(2,1) + (3,3)\cdot(4,1) + (5,1)\cdot(3,9) + (6,7)\cdot(6,2) + (8,1)\cdot(5,9) = 125,27$$

Substituindo os valores obtidos nos somatórios da equação normal, temos que:

$$m\alpha_1 + (\sum_{k=1}^{m} x_k)\alpha_2 = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) \rightarrow 5\cdot\alpha_1 + 24,2\cdot\alpha_2 = 22,2$$

$$(\sum_{k=1}^{m} x_k)\alpha_1 + (\sum_{k=1}^{m} x_k{}^2)\alpha_2 = \sum_{k=1}^{m} x_k f(x_k) \rightarrow 24,2\cdot\alpha_1 + 148,84\cdot\alpha_2 = 125,27$$

A partir disso, temos que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5\cdot\alpha_1 + 24,2\cdot\alpha_2 = 22,2 \\ 24,2\cdot\alpha_1 + 148,84\cdot\alpha_2 = 125,27 \end{cases}$$

Utilizando a calculadora de sistemas de equações, temos a seguinte inserção de dados:

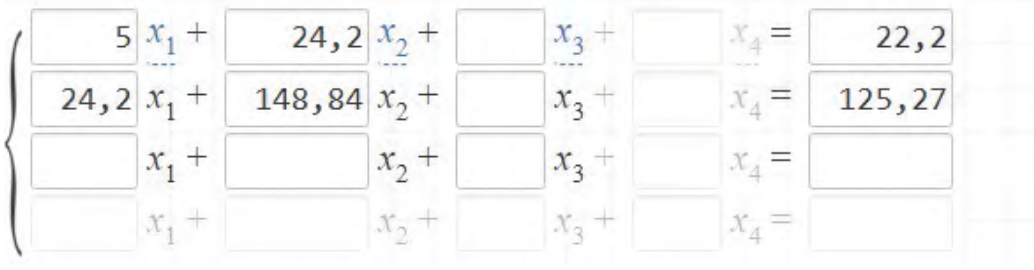


Figura 12 - Calculadora de sistema de equações com inserção dos dados / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações com inserção dos dados.

Ao solicitar a resolução pelo Método de Gauss, temos:

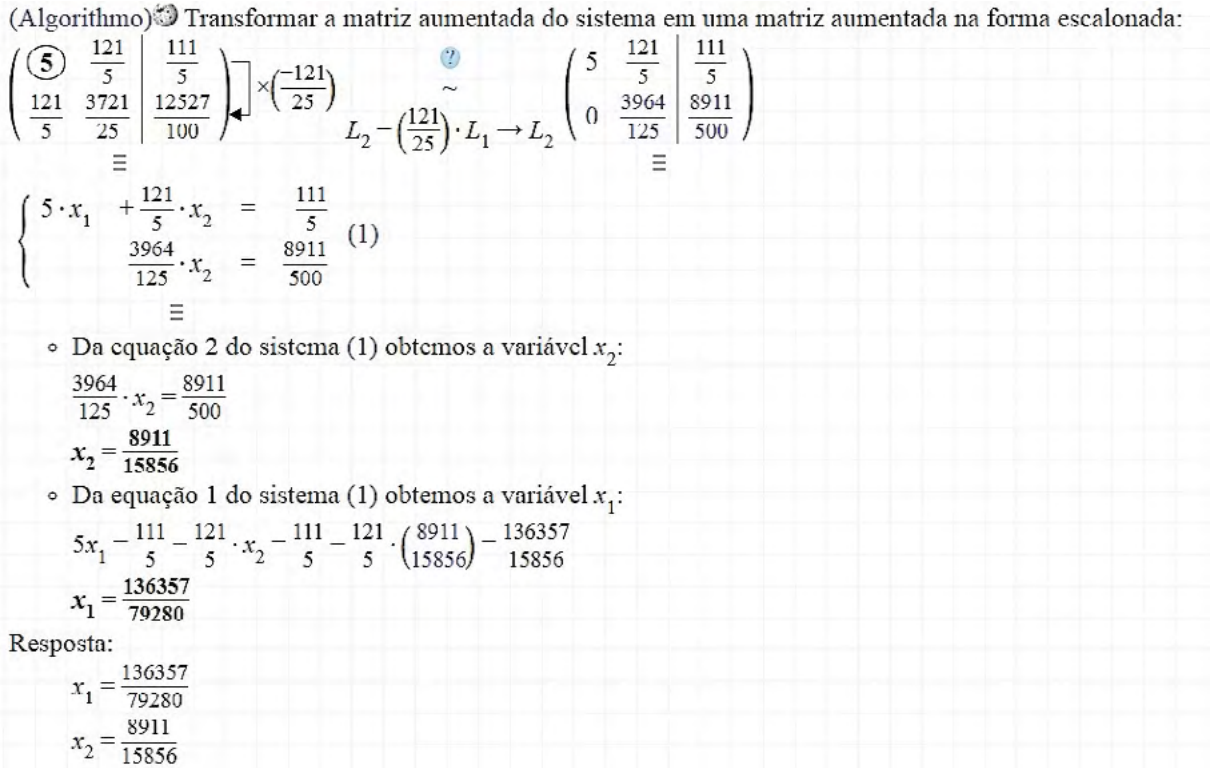


Figura 13 - Calculadora de sistema de equações com resolução pelo Método de Gauss / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações com resolução pelo Método de Gauss.

Desse modo, temos que $x_1 = \alpha_1 = \dfrac{136357}{79280}$ e $x_2 = \alpha_2 = \dfrac{8911}{15856}$. A função com melhor aproximação para os pontos obtidos será:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$\phi(x) = \frac{136357}{79280} + \frac{8911}{15856}x$$

Por meio da equação da reta obtida, é possível realizar projeções de valores fora do intervalo dado. Por exemplo, para $x = 10$, temos a seguinte estimativa:

$$\phi(x) = \frac{136357}{79280} + \frac{8911}{15856}x$$
$$\phi(10) = \frac{136357}{79280} + \frac{8911}{15856} \cdot 10$$
$$\phi(10) = \frac{136357}{79280} + \frac{89110}{15856} \cong 7,34$$

Sempre que houver uma coleta de dados, analisamos o gráfico de dispersão para analisar o tipo de função que se adequa aos dados. O método pode ser estendido para outros tipos de funções, como, por exemplo, a quadrática.

Temos diferentes métodos numéricos para o tratamento de dados para obter estimativas. Diante disso, qual seria a principal diferença entre a interpolação e o método dos mínimos quadrados? Temos que, na interpolação, os pares ordenados de uma função inicial serão os pares ordenados da função interpoladora; no método dos mínimos quadrados, isso não ocorre, determina-se uma nova função em que os pontos iniciais não atendem, necessariamente, a ela, mas possuem a menor distância possível até ela.

Outra situação em que pode ser preciso estimar valores é o cálculo de áreas de superfícies curvas. Por exemplo, podemos obter uma função a partir da coleta de dados pelo método dos mínimos quadrados e, então, calcular, por meio da integração numérica, a região abaixo da curva em um intervalo definido.

Para compreender o processo de integração numérica, é preciso conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. Uma vez compreendidos esses conceitos, podemos utilizar as leis das funções e, com o auxílio de planilhas eletrônicas, obtemos uma boa aproximação para o cálculo de áreas de superfícies curvas. Para aprofundar o seu conhecimento sobre o assunto, acesse o QR Code e estude mais sobre esse tópico.

O conceito de integração numérica consiste em subdividir a região em partes, calculando as áreas dessas partes e, posteriormente, realizando a soma. Vejamos, a seguir, uma representação gráfica do processo.

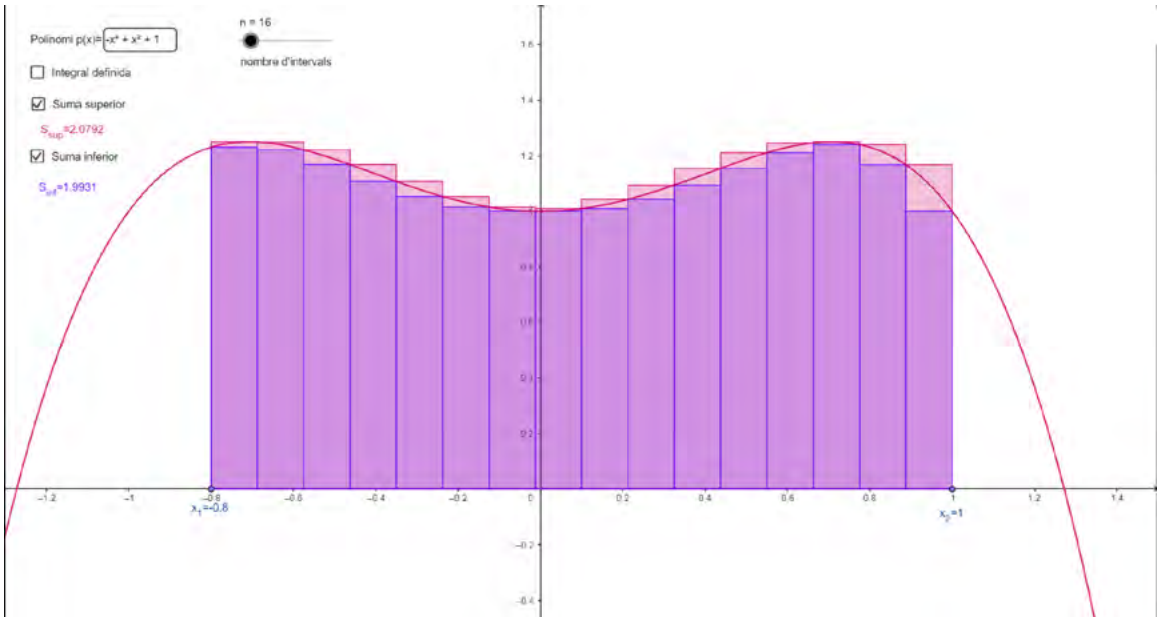


Figura 14 - Ilustração do processo de integração numérica / Fonte: Barrabes ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: imagem ilustrativa de uma região abaixo de uma curva inserida no plano cartesiano.

Ao calcular as áreas dos retângulos e realizar a soma, obtemos uma aproximação para a região abaixo da curva: quanto menores forem os espaçamentos no eixo horizontal, menor a margem de erro desse processo. Vejamos a região subdividida em intervalos menores.

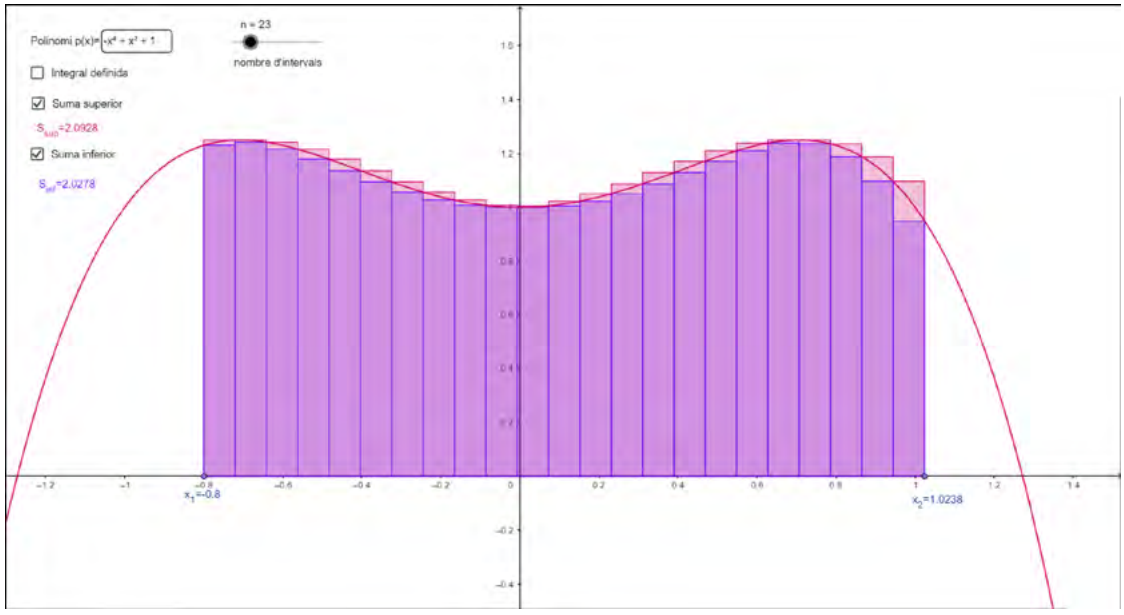


Figura 15 - Ilustração do processo de integração numérica com intervalos menores / Fonte: Barrabes ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: imagem ilustrativa de uma região abaixo de uma curva inserida no plano cartesiano.

Esse tipo de procedimento é aplicado, por exemplo, no cálculo de volumes de terra que será removido de um terreno. Utiliza-se o corte do terreno para definir a função que descreve o contorno do terreno; aplica-se o processo de integração numérica para cálculo da área de superfície; e, para obter o volume, multiplica-se o resultado da integração pela dimensão de profundidade em que se aplicará a remoção de terras.

Os conteúdos abordados nesta unidade são tópicos da subárea da Matemática denominada Cálculo Numérico. Para estudar mais casos e exemplos, utilize os materiais complementares, indicados a seguir: ***Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software***, dos autores Arenales e Darezzo (2008), e ***Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos***, dos autores Sperandio, Mendes e Silva (2003).

Quando se atua com coleta e informação de dados, pode ser preciso estabelecer novos parâmetros com base naqueles já existentes. Uma das ferramentas é o uso da interpolação, que considera um intervalo definido e, a partir disso, estabelece valores intermediários. Outra situação é quando se realiza a coleta de dados experimentais, e é preciso estabelecer as funções que se ajustem aos dados.

Esses procedimentos podem, por exemplo, ser assistidos por meio de planilhas eletrônicas, que já possuem funções pré-definidas que auxiliam o cálculo numérico. Com base nesses conceitos, você precisa realizar um estudo para planejamento urbano de uma cidade brasileira, assim, você coletou os dados, indicados na tabela a seguir:

Ano	Nº de habitantes
1990	67750
2000	70160
2010	72590

Tabela 8 - Coleta de dados segundo o IBGE (1990, 2000, 2010) / Fonte: a autora.

Ao analisar os dados fornecidos pelos censos demográficos realizados pelo IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística e os utilizando como base, será preciso realizar uma estimativa para a população existente no ano de 2005. Dessa forma, optou-se por uma interpolação quadrática. Iniciamos ao construir o gráfico com os dados por meio de uma planilha eletrônica, na qual optamos por inserir um gráfico de dispersão, ilustrado a seguir:

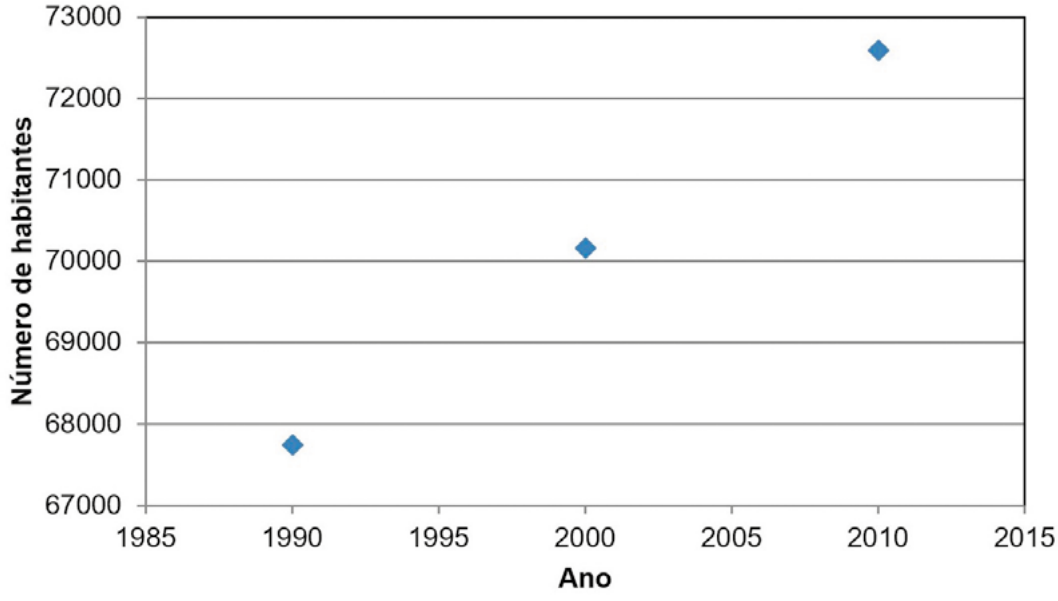


Figura 16 - Gráfico de dispersão dos dados obtidos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração por meio da representação de um gráfico de dispersão obtido a partir de uma planilha eletrônica.

Para calcular a estimativa do número de habitantes em 2005, é preciso determinar o polinômio interpolador de grau 2, dado por $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Temos que os pares ordenados pertencentes aos polinômios são indicados por:

VII. $(x_0, y_0) = (1990, 67750)$

VIII. $(x_1, y_1) = (2000, 70160)$

IX. $(x_2, y_2) = (2010, 72590)$

É preciso substituir os valores no sistema de equação a seguir:

$$\begin{cases} a_2 x_0 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Em que:

$$\begin{cases} a_2 1990^2 + a_1 1990 + a_0 = 67750 \\ a_2 2000^2 + a_1 2000 + a_0 = 70160 \\ a_2 2010^2 + a_1 2010 + a_0 = 72590 \end{cases}$$

Reorganizando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3960100a_2 + 1990a_1 + a_0 = 67750 \\ 4000000a_2 + 2000a_1 + a_0 = 70160 \\ 4040100a_2 + 2010a_1 + a_0 = 72590 \end{cases}$$

Utilizaremos a calculadora on-line para a resolução de sistemas de equações lineares. Ao inserir os dados, temos:

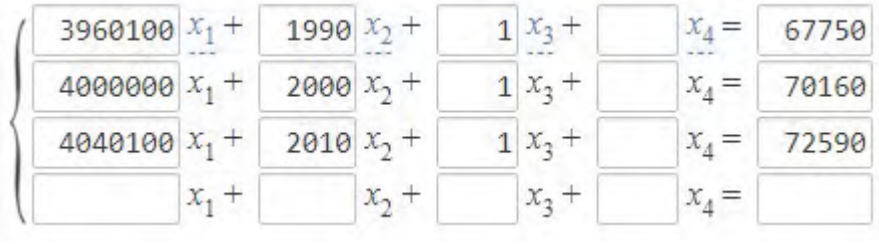


Figura 17 - Calculadora de sistema de equações com inserção dos dados / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações com inserção dos dados.

Solicitando a resolução pelo Método de Gauss, temos:

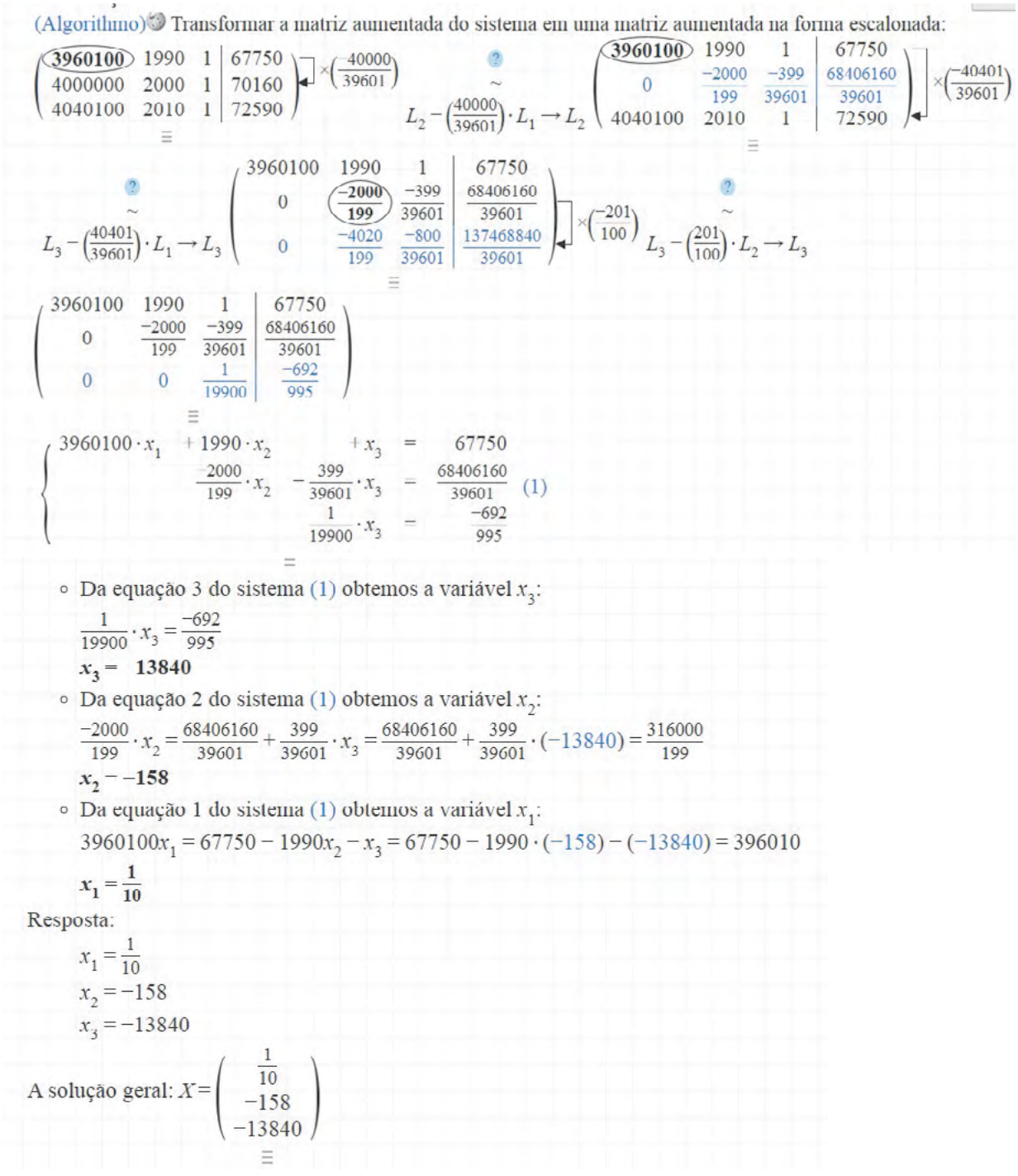


Figura 18 - Calculadora de sistema de equações com resolução pelo Método de Gauss / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração da calculadora on-line para resolução de sistemas de equações pelo Método de Gauss.

Devemos associar $x_1 = a_2 = \frac{1}{10} = 0,1$, $x_2 = a_1 = -158$ e $x_3 = a_0 = -13840$. Dessa forma, o polinômio quadrático é dado por: $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \rightarrow p(x) = 0,1x^2 - 158x - 13840$. Agora, realizaremos a estimativa da população para o ano de 2005, ou seja:

$$p(x) = 0,1x^2 - 158x - 13840$$
$$p(2005) = 0,1 \cdot (2005)^2 - 158 \cdot 2005 - 13840$$
$$p(2005) = 0,1 \cdot 4084441 - 319318 - 13840$$
$$p(2005) = 408444,1 - 333158$$
$$p(2005) = 71372,5$$

Ao analisar o resultado obtido por meio do cálculo com a interpolação quadrática, temos que a estimativa da população para o ano de 2005 é de 71.372 habitantes.

A partir do termo central “métodos numéricos”, podemos produzir um mapa mental, estabelecendo relações com procedimentos para obtenção de estimativas tratadas na unidade, conforme o exemplo ilustrado a seguir.

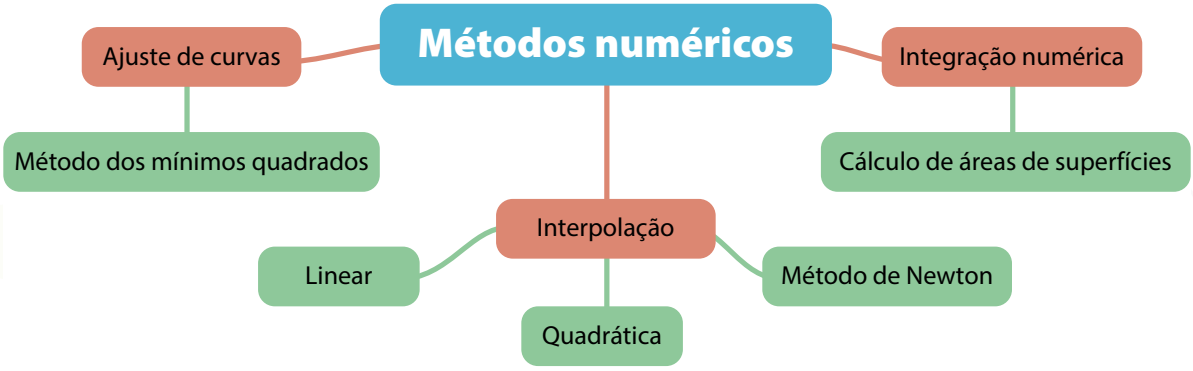


Figura 19 - Mapa mental sobre métodos numéricos / Fonte: a autora.

Utilize o exemplo e complemente com as suas anotações de cada tópico abordado nesta unidade. Coloque as imagens das representações e as fórmulas de cálculos sobre a interpolação, ajustes de curvas e integração numérica. Para desenvolver essa atividade, recomendamos que utilize a ferramenta de criação de mapa mental, gratuitamente disponibilizada em https://www.goconqr.com/.

MAPA MENTAL

1. Podemos utilizar procedimentos diferentes para realizar a interpolação de dados, mas, mesmo ao utilizar diferentes métodos, os resultados precisam ser equivalentes. Considere os dados para interpolação a seguir.

x	$f(x)$
-1	4
0	1
2	-1

Fonte: RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: McGraw-Hill, 1988 (adaptada).

Interpolamos esses dados anteriormente pelo Método de Newton. Qual seria o procedimento para a interpolação dos dados utilizando o método de resolução de sistemas lineares?

2. Considere os dados obtidos por meio de uma coleta e indicados na tabela a seguir:

x	$f(x)$
-1,0	2,0
-0,75	1,153
-0,6	0,45
-0,5	0,4
-0,3	0,5
0,0	0,2
0,2	0,2
0,4	0,6
0,5	0,512
0,7	1,2
1	2,05

Fonte: RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: McGraw-Hill, 1988 (adaptada).

É preciso definir uma função para ajustar aos pontos. Qual é o tipo de função adequada?

AGORA É COM VOCÊ

3. Os métodos numéricos são ferramentas utilizadas no tratamento de informações que auxiliam, por exemplo, no cálculo de estimativas. Com base nisso, analise as afirmações a seguir.

   I) Na interpolação, é possível determinar estimativas dentro do intervalo definido para ela.

   II) Quando se aplica o ajuste de curvas, somente é possível obter funções do tipo lineares.

   III) A integração numérica é um método para a obtenção de áreas de superfícies limitadas por curvas em um intervalo pré-determinado.

   Assinale a alternativa que corresponde ao julgamento das afirmações.

   a) Apenas II e III são corretas.

   b) Apenas I e II são corretas.

   c) Apenas I e III são corretas.

   d) Apenas I é correta.

   e) Apenas III é correta.

7 Grandezas físicas e unidades, noções de Cinemática e Dinâmica

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, serão abordadas as grandezas físicas, as quais são base para diversas aplicações. Iniciamos ao apresentar a forma de notação científica e, na sequência, definimos medidas de comprimento, massa, capacidade, superfície, volumes e tempo. Em um segundo momento, trataremos de noções de Cinemática e Dinâmica, dois conceitos que estruturam a Física como ciência. Nosso objetivo é conhecer os tipos de grandezas, suas notações adequadas e aplicar em conceitos relacionados à área da Física. Bons estudos!

Em um projeto arquitetônico, são elaboradas etapas que promovem o bom andamento do processo de desenvolvimento, são elas:

- Realizar a primeira reunião para conhecer as pretensões do cliente e obter as informações para a elaboração do programa de necessidades.
- Formalizar a prestação de serviço por meio de um contrato e o detalhamento das etapas combinadas, informando os dados dos envolvidos, contratado e contratante, bem como os ambientes que fazem parte do projeto e quais serviços serão prestados.
- Elaborar e apresentar o estudo preliminar com registro em ata em reunião.
- Elaborar e apresentar o anteprojeto com registro em ata em reunião.
- Apresentar as pranchas com as peças gráficas, memorial descritivo e orçamento do projeto com registro em ata em reunião.

Dentre essas etapas, destacamos a elaboração do memorial descritivo. É nesse documento que são apresentadas as especificações técnicas, memoriais de cálculos e todas as informações relevantes para o bom entendimento do projeto.

Com base nas medidas expressas na planta baixa, indicamos, no memorial descritivo, as medidas em metro linear de cada ambiente. Essa informação é utilizada, por exemplo, para o cálculo da metragem de rodapé, quando se aplica um revestimento no ambiente. Outra informação que pode ser obtida pela medida do metro linear é a altura do pé direito. Por meio dele, obtém-se o cálculo de quantos metros quadrados cada ambiente possui. Esse tipo de informação é utilizado para calcular em quantos metros de superfície deve ser aplicada, por exemplo, a pintura.

No memorial, é preciso apresentar todos os procedimentos e especificações que devem ser executadas na obra. Outro tipo de cálculo que, talvez, seja necessário realizar é a quantidade de terra que cabe em um caminhão de transporte. Há diversas situações em que é preciso saber o volume, pois, com isso, pode-se estimar, por exemplo, a quantidades de viagens necessárias para deslocar o volume total de terra.

Apenas nesse breve relato, vimos diversas unidades de medidas. Agora, você sabe como são aplicadas as unidades de medidas? Existe alguma padronização?

O desenvolvimento tecnológico exigiu que padrões fossem formados. Para as diferentes unidades existentes, foi preciso estabelecer um sistema internacional de medidas indicado por (SI), em que se estabelece, de acordo com a grandeza, a nomenclatura adotada e o símbolo utilizado. Vejamos um quadro síntese que expressa as principais grandezas:

Grandeza	Nome	Plural	Símbolo
Comprimento	Metro	Metros	m
Área	Metro quadrado	Metros quadrados	m^2
Volume	Metro cúbico	Metros cúbicos	m^3
Ângulo plano	Radiano	Radianos	rad
Tempo	Segundo	Segundos	s
Frequência	Hertz	Hertz	Hz
Velocidade	Metro por segundo	Metros por segundo	m/s
Aceleração	Metro por segundo por segundo	Metros por segundo por segundo	m/s^2
Massa	Quilograma	Quilogramas	kg
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	Quilogramas por metro cúbico	kg/m^3
Vazão	Metro cúbico por segundo	Metros cúbicos por segundo	m^3/s
Quantidade de matéria	Mol	Mols	mol
Força	Newton	Newtons	N
Pressão	Pascal	Pascals	Pa
Trabalho, energia quantidade de calor	Joule	Joules	J
Potência, fluxo de energia	Watt	Watts	W
Corrente elétrica	Ampère	Ampères	A
Carga elétrica	Coulomb	Coulombs	C
Tensão elétrica	Volt	Volts	V
Resistência elétrica	Ohm	Ohms	Ω
Condutância	Siemens	Siemens	S
Capacitância	Farad	Farads	F
Temperatura Celsius	Grau Celsius	Graus Celsius	°C
Temp. termodinâmica	Kelvin	Kelvins	K

Grandeza	Nome	Plural	Símbolo
Intensidade luminosa	Candela	Candelas	cd
Fluxo luminoso	Lúmen	Lúmens	lm
Iluminamento	Lux	Lux	lx

Quadro 1 - Unidades do sistema internacional de medidas / Fonte: adaptado de Inmetro ([2021], on-line)[1].

No quadro, vimos diversas grandezas e suas respectivas unidades de medidas, que são aplicadas em diversas áreas. Na área da Arquitetura, por exemplo, para fazer um estudo luminotécnico, precisamos compreender como são analisados o fluxo luminoso e o iluminamento. Ou, ainda, quando se realiza um projeto complementar elétrico, são aplicados os conceitos de corrente elétrica e tensão elétrica, entre outras grandezas.

Por exemplo, as lâmpadas possuem diferentes fluxos luminosos, é preciso considerar quantos lúmens são gerados por watt consumido para avaliar o seu consumo; já o nível de iluminância é medido em lux, e, para avaliar se a iluminação está adequada em um espaço, primeiramente, é preciso calcular a área em metros quadrados, de modo que o lúmen seja a quantidade de luz medida por meio de um ponto emissor de luz. O lux é a incidência de luz de um ponto, sendo que 1 lúmen tem a capacidade de iluminar a equivalência de 1 lux em 1 metro quadrado.

Liste mais alguns exemplos de unidades de medidas conhecidas que você acredita que encontrará e utilizará ao longo de sua trajetória profissional.

DIÁRIO DE BORDO

Existem diversas unidades de medidas que se relacionam, como vimos no caso da eficiência energética e iluminância de um ambiente. Você consegue relacionar as unidades que listou entre elas e com a sua atividade profissional?

Para definirmos os conceitos relacionados, principalmente, à Física, apresentaremos as unidades de medidas que são base para o estudo que envolve as grandezas. Dentre elas, destacamos as medidas de comprimento, massa, capacidade, superfície, volumes e tempo. Considerando que a Física busca esclarecer a ocorrência de fenômenos, sendo uma ciência natural que estuda, por exemplo, matéria e energia, abordaremos as subáreas de Cinemática e Dinâmica, apresentando noções conceituais sobre esses tópicos.

Para abordarmos as unidades de medidas, é preciso conhecer a notação científica. Principalmente, nos estudos de fenômenos da Física, deparamo-nos com corpos ou quantidades que são muito grandes ou muito pequenas quando comparadas às quantidades usuais. Dessa forma, é preciso utilizar as potências de 10 para operacionalizar alguns cálculos. Vejamos algumas situações.

I. Velocidade aproximada da luz no vácuo → 300000000 m/s

II. Tamanho médio de uma célula → 0,000030 m

Um modo de representar essas quantidades muito grandes ou muito pequenas é por meio dos fatores multiplicativos, os quais possibilitam a escrita em um formato que otimiza a realização de operações matemáticas, chamada notação científica.

Temos a seguinte definição para operação de potenciação:

Se $a^n = b$, o número a é denominado base, n é o expoente, e b é o resultado.

Sendo que:

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^n = a \cdot a \cdot a ... a \cdot a \ (n \geq 2)$$

São propriedades da potenciação:

I. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

II. $(a^p \cdot b^q)^n = a^{pn} \cdot b^{qn}$

III. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

IV. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

V. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

VI. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$

Vejamos alguns exemplos para o caso da propriedade V:

$$(3)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1} = \left(-\frac{5}{3}\right)^1 = -\frac{5}{3}$$

A notação científica corresponde a um modo de escrever números usando potência de base 10. A partir da definição de potenciação, exemplificamos a representação de potências de base 10, vejamos:

1. Primeiro caso:

Potências positivas	
10^0	1
10^1	10
10^2	100
10^3	1000

Tabela 1 - Potências de 10 positivas / Fonte: a autora.

2. Segundo caso:

Potências negativas	
10^0	1
10^{-1}	0,1
10^{-2}	0,01
10^{-3}	0,001

Tabela 2 - Potências de 10 negativas / Fonte: a autora.

Ao utilizar a potência de 10, podemos expressar o número em notação científica. Vejamos os exemplos:

$$1\ 300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1{,}3 \cdot 10^{21}$$

$$0{,}000000000000000000000000000911 = 9{,}11 \cdot 10^{-21}$$

Utilizamos as seguintes formas:

I. Números grandes: deslocar a vírgula para a esquerda até o primeiro algarismo e expressar o deslocamento utilizando as potências de 10 positivas.
II. Números pequenos: deslocar a vírgula para a direita até o primeiro algarismo significativo e expressar o deslocamento utilizando as potências de 10 negativas.

É possível realizar operações ao utilizar a notação científica. Vejamos:

a) Adição e subtração: é realizada somente quando as potências de 10 possuem o mesmo expoente. Assim, somamos ou subtraímos os números e repetimos a potência de 10.

Exemplo: $6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^3 = 15 \cdot 10^3$.

b) Multiplicação: é realizada multiplicando os números, repetindo a base 10 e somando os expoentes.

Exemplo: $6 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 6 \cdot 9 \cdot 10^{3+3} = 54 \cdot 10^6 = 5{,}4 \cdot 10^7$.

c) Divisão: é realizada dividindo os números, repetindo a base 10 e subtraindo os expoentes.

Exemplo: $(16 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^5) = (16 : 2) \cdot 10^{3-5} = 2 \cdot 10^{-2}$.

Outras operações podem ser realizadas baseadas nas propriedades da potenciação. Com base nas notações científicas, podemos tratar das unidades de medidas. Iniciamos ao abordar sobre as medidas de comprimento, utilizadas como padrão de medida de distância, tendo como unidade fundamental o metro, sendo definida a partir de:

$$\frac{1}{299792458}$$ da distância percorrida pela luz no vácuo durante 1 s.

O metro é um padrão utilizado para medidas com baixa extensão, como, por exemplo, comprimento da parede de uma sala de estar, largura de uma rua, altura de um edifício. Para medidas maiores, utilizamos os múltiplos do metro; para as menores, os submúltiplos, expressos da seguinte forma:

Múltiplos				Submúltiplos		
Quilômetro	Hectômetro	Decâmetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
Km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Tabela 3 - Múltiplos e submúltiplos do metro / Fonte: a autora.

Uma vez que o metro é a unidade fundamental, podemos criar outras derivadas dele. Vejamos alguns exemplos:

Unidade	Símbolo	Equivalência
Metro	m	Unidade padrão
Quilômetro	Km	2 km = 2000 m = 2.10^3 m
Centímetro	cm	5 cm = 0,05 m = 5.10^{-2} m
Milímetro	mm	3 mm = 0,003 m = 3.10^{-3} m
Micrômetro	μm	1 μm = 10-6 m

Tabela 4 - Exemplos de múltiplos e submúltiplos do metro / Fonte: a autora.

Temos, também, as medidas de massa. Observamos que massa e peso são grandezas diferentes, sendo que a massa é a grandeza associada à quantidade de matéria e pode ser medida por meio de uma balança. Enquanto o peso é a força com que os corpos são atraídos para o centro de um astro, como, por exemplo, para o centro da Terra. Vejamos a tabela de unidades de medida de massa.

Múltiplos				Submúltiplos		
Quilograma	Hectograma	Decagrama	Grama	Decigrama	Centigrama	Miligrama
Kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Tabela 5 - Múltiplos e submúltiplos do grama / Fonte: a autora.

O padrão internacional da grandeza massa é um cilindro de 1 quilograma, exposto no Museu Internacional de Pesos e Medidas, na cidade de Sèvres, na França. Exemplificamos, a seguir, algumas unidades de massa:

Unidade	Símbolo	Equivalência
Tonelada	t	$1\ t = 10^3\ kg$
Quilograma	kg	Unidade padrão
Grama	g	$1\ g = 10^{-3}\ kg$
Miligrama	mg	$1\ mg = 10^{-6}\ kg$

Tabela 6 - Exemplos de múltiplos e submúltiplos do quilômetro / Fonte: a autora.

Para as medidas de capacidade, utilizamos como referência o litro como unidade fundamental, sendo que as unidades mais utilizadas são o litro e o mililitro. Vejamos a tabela de unidades de medida de capacidade.

Múltiplos				Submúltiplos		
Quilolitro	Hectolitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

Tabela 7 - Múltiplos e submúltiplos do litro / Fonte: a autora.

A área é a região ocupada por uma superfície plana ou curva. Para esse tipo de medida, são utilizadas as medidas de superfície. Adota-se como unidade fundamental o metro quadrado, de modo que, para medidas maiores, utilizamos os múltiplos do metro quadrado, para as menores, os submúltiplos, expressos da seguinte forma:

Múltiplos				Submúltiplos		
Quilômetro quadrado	Hectômetro quadrado	Decâmetro quadrado	Metro quadrado	Decímetro quadrado	Centímetro quadrado	Milímetro quadrado
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1000000	10000	100	1	0,01	0,0001	0,000001
10^6	10^4	10^2	10^0	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}

Tabela 8 - Múltiplos e submúltiplos do metro quadrado / Fonte: a autora.

Considere que, ao esboçar a planta baixa de uma residência, as dimensões da sala são 6 cm de largura e 10 cm de comprimento. Sabendo que a largura da medida real da sala é de 4,5 m, como podemos determinar a medida de área dessa sala?

Nesse caso, podemos estabelecer uma escala, associando a medida de largura do desenho com a medida real, adotando a mesma unidade de medida, isto é, $4,5\ m = 450\ cm$, assim,

$Escala = \frac{medida\ do\ desenho}{medida\ real} = \frac{6}{450} = \frac{1}{75}$, ou seja, foi aplicada a escala de 1:75. Desse modo, a medida de comprimento real é de $10 \cdot 75 = 750\ cm \rightarrow 7,5\ m$, ou seja, temos o comprimento de 4,5 metros de largura por 7,5 metros de comprimento. Calculando a área: $A = 4,5 \cdot 7,5 = 33,75\ m^2$.

Quanto ao volume, pode ser entendido como o espaço ocupado por um sólido. Nesse caso, são utilizadas as medidas de volume, sendo o metro cúbico a unidade fundamental. Podemos obter outras derivadas dele, vejamos a tabela de unidades:

Múltiplos				Submúltiplos		
Quilômetro cúbico	Hectômetro cúbico	Decâmetro cúbico	Metro cúbico	Decímetro cúbico	Centímetro cúbico	Milímetro cúbico
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1000000000	1000000	1000	1	0,001	0,000001	0,000000001
10^9	10^6	10^3	10^0	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Tabela 9 - Múltiplos e submúltiplos do metro cúbico / Fonte: a autora.

Podemos converter as medidas de volumes em medidas de capacidade, de modo que:

$$1\ m^3 = 1000\ L \text{ ou, ainda, } 1\ dm^3 = 1\ L.$$

Em um projeto arquitetônico, será preciso construir uma piscina retangular de 3 metros de largura por 5 metros de comprimento. Qual deve ser a medida de profundidade da piscina para que caibam 30.000 litros de água?

Primeiramente, precisamos adequar as unidades, convertendo litros para metros cúbicos, ou seja, $30000\ L = 30\ m^3$, assim, temos o volume total dessa piscina. Como o volume é dado por

$$V = comprimento \cdot largura \cdot altura$$
$$30 = 3 \cdot 5 \cdot h$$
$$30 = 15h$$
$$h = \frac{30}{15}$$
$$h = 2\ m$$

Ou seja, a profundidade da piscina será de 2 metros.

Para **medidas de tempo**, são adotadas a duração do ano, sua subdivisão em meses, limitada por dias, compostos por horas, que se subdividem em minutos e, subsequentemente, em segundos. No sistema internacional de medidas, o padrão são os segundos, sendo que:

Unidade	Símbolo	Equivalência
Segundo	s	Unidade padrão
Minuto	min	1 min = 60 s
Hora	h	1 h = 3600 s

Tabela 10 - Unidades de tempo / Fonte: a autora.

A rotação da Terra em torno de seu próprio eixo determina o período do dia. Com base no movimento de translação da Terra ao redor do Sol, determina-se o período do ano.

Além das medidas que fazem parte do SI, existem outras que são utilizadas. São alguns casos:

- 1 milha marítima: 1852 m.
- 1 polegada: 0,0254 m.
- 1 pé: 12 polegadas = 0,3048 m.
- 1 jarda: 3 pés = 0,9144 m.
- 1 ano-luz: $9,46 \cdot 10^{12}$ km.
- 1 libra: 0,45 kg.

Por exemplo, os monitores e televisores são medidos em polegadas

As unidades de medidas são essenciais em diversas áreas do conhecimento. Na Física, são de grande aplicabilidade. Nessa área do conhecimento, estudaremos os fenômenos que ocorrem cotidianamente, tratando, especificamente, de noções de Cinemática e Dinâmica. Galileu Galilei, no século XVI, já considerava que o universo pode ser descrito por meio das Leis da Física, expressas pela linguagem matemática. Nesse sentido, por meio da instrumentação matemática, são estudados os fenômenos físicos.

A subárea da Física, Mecânica, estuda o movimento, e a Cinemática é uma divisão da Mecânica que estuda os movimentos sem referências às suas causas. Para isso, é preciso definir ponto material, vejamos:

O ponto material pode representar qualquer corpo, como um veículo, um projétil, uma aeronave. Indicamos como ponto porque são desprezadas as dimensões do corpo em movimento sempre que as distâncias envolvidas forem grandes em relação às dimensões do corpo. E material porque, mesmo desprezando as suas dimensões, a massa do corpo deverá ser considerada.

Por exemplo, considere um trem passando por uma ponte, conforme ilustrado a seguir.

Figura 1 - Trem passando sobre uma ponte

Descrição da Imagem: imagem de um trem passando sobre uma ponte em meio a uma floresta rodeada de montanhas.

Se considerarmos que o percurso total do trem seja de 500 km, do ponto inicial ao ponto final, o comprimento do trem é pequeno se comparado à distância do trajeto; mas, se considerarmos apenas o trajeto sobre a ponte ilustrada, o comprimento da ponte não é muito maior que o do trem. Nesse caso, só pode ser considerado como ponto material se adotarmos como referência o trajeto completo. Outra observação é que o movimento executado por meio da rotação das rodas implica que qualquer ponto possui o mesmo movimento, assim, podemos considerar um ponto qualquer do trem para estudar o movimento que ele realiza.

Outra consideração é que o movimento é observado a partir de um ponto referencial, vejamos algumas situações:

I. Analisar a paisagem de dentro de um veículo em movimento: ao observarmos a paisagem externa, é possível verificar os conceitos de movimento e repouso. Nesse caso, a paisagem é a referência do carro.

II. Ao observarmos o movimento do Sol por meio da esfera celeste, verificamos que a Terra se movimenta ao redor dele. Nesse caso, o Sol é o referencial da Terra.

III. Se algo crescer confinado em ambiente completamente fechado, sem janelas, não poderá distinguir se o ambiente está em repouso ou movimento. Nesse caso, não há referencial.

Observe a ilustração a seguir:

Figura 2 - Carro em movimento

Descrição da Imagem: imagem de um carro em movimento em uma estrada, com a vista a partir da posição do motorista.

Quando estamos a bordo de um carro em movimento em uma longa estrada com paisagem natural, temos a sensação de que as árvores estão se movimentando, e não o veículo. Isso ocorre porque não há repouso nem movimentos absolutos, depende do referencial que é adotado.

Outro conceito relevante é a trajetória. Observemos as figuras a seguir:

Figura 3 - Aeronave em velocidade constante

Descrição da Imagem: imagem mostra uma aeronave sobre o céu azul com nuvens, e, à frente da aeronave, está o Sol.

Quando uma aeronave voa em velocidade constante e desprezando a resistência do ar, verifica-se que se mantém horizontalmente no ar. Sua trajetória será uma reta horizontal em relação ao solo.

Figura 4 - Lançamento de projétil

Descrição da Imagem: imagem do lançamento de dois projéteis, realizado por aeronave a uma determinada altura do solo. O projétil realiza uma trajetória de arco parabólico.

Ao lançar um projétil, em relação ao solo, ele terá uma trajetória em formato de arco parabólico. Dessa forma, ao expressarmos, graficamente, as duas trajetórias, temos:

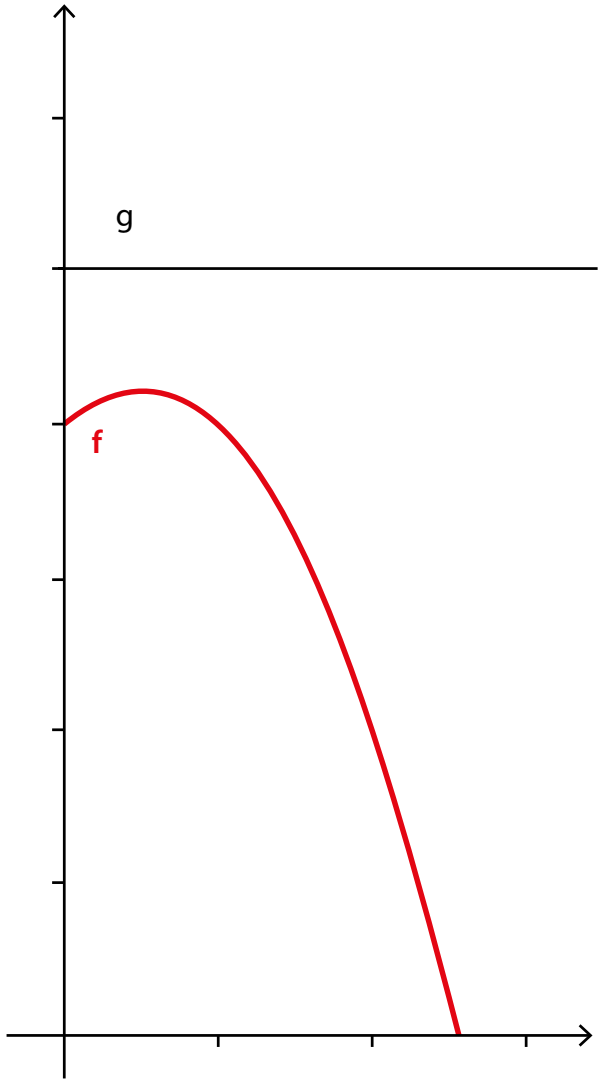


Figura 5 - Trajetórias do avião e do projétil / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração, no plano cartesiano de escala, da trajetória realizada pelo avião na forma de reta constante, paralela em relação ao eixo x, e da trajetória do projétil na forma de arco parabólico.

No caso do avião, indicado pela notação g no gráfico, verificamos que, como a velocidade é constante, a trajetória representa uma reta paralela ao eixo x. Já no caso do lançamento de projétil, após ser lançado, ele tem o comportamento de uma trajetória de arco parabólico. Assim, podemos concluir que a trajetória é a linha descrita ou percorrida por um corpo em movimento, dependendo do referencial adotado.

Outra consideração é a localização de um móvel. Por exemplo, nas rodovias, são inseridos marcos de quilometragem para demarcar a estrada, que são utilizados como referências, como, por exemplo, para atendimentos de emergências em casos de acidentes de trânsito. Vejamos um exemplo de sinalização em uma estrada:

Figura 6 - Placa de indicação de Km

Descrição da Imagem: imagem de uma placa indicando o Km 814. Essa placa está ao lado direito do acostamento, em uma estrada com paisagem rural, sem trânsito de veículos.

Para realizar a localização em uma trajetória, é preciso que ela seja numerada com base em uma unidade utilizada como padrão de referência. No caso da estrada, foi utilizado o Km como unidade de medida.

Temos diversos conceitos relacionados à Cinemática, mas como relacionar esses conceitos com as unidades de medidas?

Considere uma agência de viagens que faz o trajeto da cidade do Rio de Janeiro até a cidade de São Paulo. Considere que dois ônibus fazem esse trajeto simultaneamente: o ônibus A sai da cidade do Rio de Janeiro, com velocidade constante de 120 km/h, e o ônibus B sai da cidade de São Paulo, com uma velocidade constante de 90 km/h, realizando o mesmo trajeto em sentidos opostos. Se nenhum dos ônibus fez paradas, analise as afirmações a seguir, considerando que os ônibus A e B se cruzaram na estrada. Então:

I. O ônibus A estará mais perto de São Paulo do que o ônibus B.

II. O ônibus B terá andado mais tempo do que o A.

Ao analisar as informações, podemos concluir que ambos os ônibus se localizam no mesmo ponto de referência, assim, as distâncias para as cidades de São Paulo e para a cidade do Rio de Janeiro são as mesmas. Com relação ao tempo, ambas trafegaram o mesmo tempo, pois saíram simultaneamente do ponto de partida.

No contexto da Física, o espaço é um número real que permite a localização do móvel em sua trajetória, sendo considerado a partir de um zero arbitrário, chamado de origem da trajetória. De acordo com o SI, o metro é a unidade de medida de espaço. Observe que o conceito de espaço no âmbito da Física é diferente do conceito de espaço no âmbito da Geometria. Dessa forma, em cada caso, é preciso considerar o contexto em que é aplicado.

Outro conceito é o deslocamento escalar, que mede a variação de espaço efetuada pelo móvel em um determinado intervalo de tempo. Essa grandeza é considerada algébrica, podendo ser positiva, negativa ou nula.

Temos diversos tipos de movimentos, como:

I. **Movimento uniforme**: ocorre em linha reta, sem a ocorrência da aceleração.

II. **Movimento uniformemente variado**: ocorre a variação de velocidade em intervalos regulares, ou seja, a sua velocidade é constante ao longo do tempo e é diferente de zero.

III. **Movimento circular**: ocorre de forma periódica, em ciclos, por meio da rotação em torno de um eixo.

Por exemplo, as bicicletas possuem uma corrente que liga uma correia dentada dianteira, movimentada pelos pedais, a uma coroa dentada de raio menor. Vejamos a ilustração:

Figura 7 - Bicicleta com destaque na corrente

Descrição da Imagem: ilustração de uma bicicleta na posição lateral, possibilitando identificar a corrente.

O movimento gerado pelos pedais é um movimento circular, sendo que o número de voltas dadas pela roda traseira a cada pedalada depende do tamanho relativo das coroas dentadas. No caso da bicicleta, a velocidade escalar de um ponto qualquer da coroa dentada maior em contato com a correia é igual à velocidade escalar de um ponto qualquer do pinhão em contato com a correia.

Para compreender os movimentos dos corpos e as suas causas, recorremos à subárea da Física denominada Dinâmica, em que são estabelecidos princípios básicos ou leis do movimento.

Considerando as forças aplicadas em um ponto material, temos um referencial inercial, em que são válidas as Leis de Newton. Isaac Newton, em 1687, publicou a obra *Os princípios matemáticos da Filosofia natural*, em que fez um estudo sobre a compreensão do mundo, estabelecendo princípios que regem os movimentos dos corpos. Esses princípios são aplicados até a atualidade para resolução de problemas de mecânica celeste e física dos grandes corpos.

Entre os tópicos da Dinâmica a serem considerados, damos destaque para a força, que é o resultado da interação entre corpos, podendo produzir equilíbrio, variação de velocidade e deformação. Por exemplo, há a aplicação de força quando um jogador chuta uma bola de futebol. Quando o jogador chutar a bola em repouso sobre uma superfície horizontal, a força que saiu do seu pé será aplicada na bola durante um certo tempo em que o pé toca a bola. Essa força produz a variação de velocidade. Após a bola entrar em movimento, a força que se aplicou nela deixa de existir, e a bola ganha velocidade, ou seja, ao interromper a interação entre os corpos, as forças que foram aplicadas deixam de existir. Vejamos, a seguir, uma aplicação da força em um objeto.

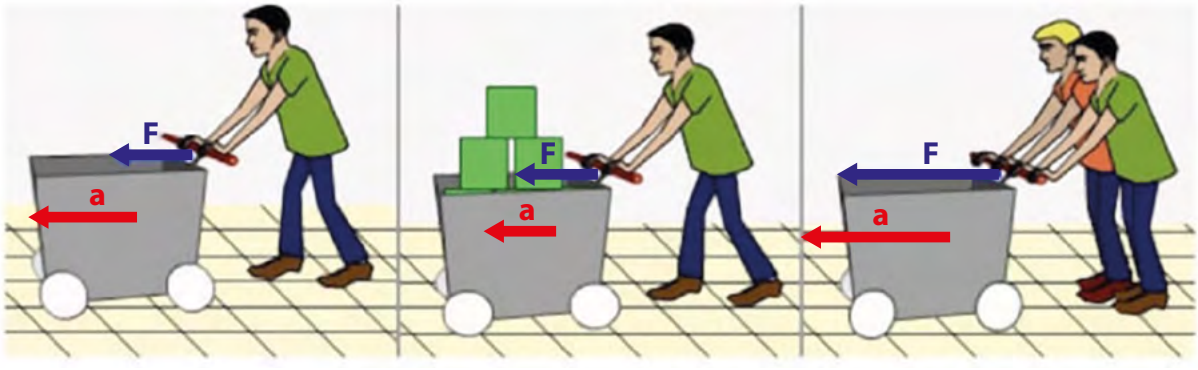


Figura 8 - Aplicação de força / Fonte: Oliveira e Mizukochi ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de aplicações de força e sua interferência aumentando ou diminuindo a aceleração ao empurrar um carrinho sem carga, com carga e com duas aplicações de força. No primeiro quadro, temos um homem empurrando um carrinho sem carga. No segundo quadro, o personagem aplica força em um carrinho com carga. E, no terceiro quadro, dois personagens empurram um carrinho sem carga.

Para compreender as aplicações de forças e as suas relações com as Leis de Newton, acesse QR Code a seguir e veja as ilustrações e os experimentos que a exemplificam de forma dinâmica.

Com relação às Leis de Newton, temos:

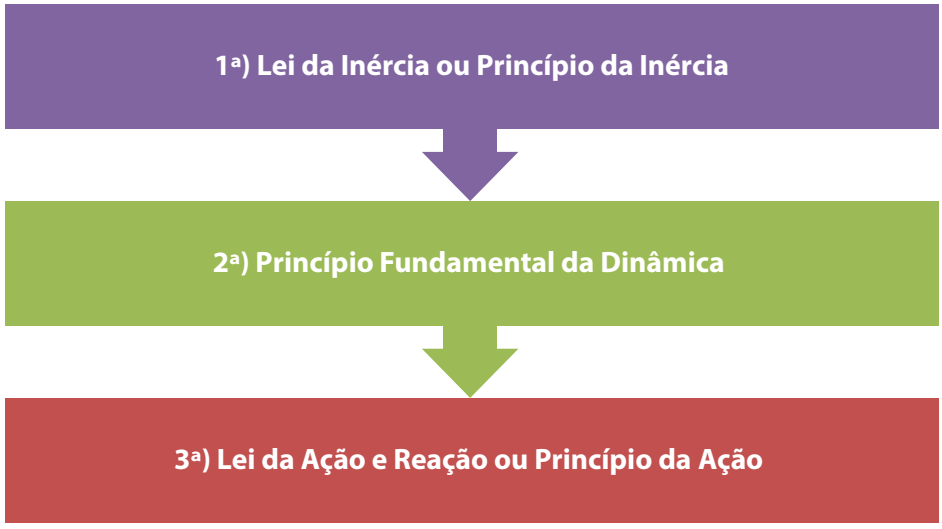


Figura 9 - Leis de Newton / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico disposto horizontalmente, contendo as três Leis de Newton: 1ª) Lei da Inércia ou Princípio da Inércia; 2ª) Princípio Fundamental da Dinâmica; 3ª) Lei da Ação e Reação ou Princípio da Ação.

Podemos descrever essas leis como:

1. **A Lei da Inércia ou o Princípio da Inércia**: trata-se da tendência dos corpos de permanecerem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU), ou seja, para um corpo sair do seu estado de repouso ou de MRU, é necessário que uma força atue sobre ele. Sendo que, ao aplicar uma soma vetorial, se o resultado for nulo, há um equilíbrio entre as partículas, mas, se houver forças resultantes, há a variação de sua velocidade. Observamos que, quanto maior for a massa de um corpo, maior será a inércia, tendo a tendência de permanecer em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

2. **O Princípio Fundamental da Dinâmica**: verifica-se que a força resultante ou, ainda, a soma vetorial de todas as forças aplicadas é diretamente proporcional ao produto da aceleração de um corpo pela sua massa.

3. **A Lei da Ação e Reação ou o Princípio da Ação e Reação**: toda força de ação é correspondida por uma força de reação.

Participe da discussão sobre a aplicação de unidades de medidas na Arquitetura. Aperte o play, e vamos juntos!

Dessa forma, compreendemos as grandezas e unidades adotadas no sistema internacional de medidas, sendo base para os estudos dos fenômenos da Física. Além disso, introduzimos os conceitos relacionados à Cinemática e Dinâmica.

Os conteúdos abordados nesta unidade estão relacionados com os princípios da Física e instrumentalizados pela Matemática. Com relação ao que estudamos anteriormente, muitas das aplicações do Cálculo Diferencial e Integral estão relacionados aos fenômenos físicos, sendo uma forma de aproximar as ciências da Física e da Matemática. Além disso, os conceitos relacionados aos estudos vetoriais são base para diversas operações realizadas na resolução de problemas da Física, sendo uma ferramenta relevante. Para complementar seus estudos, recomendamos as seguintes obras: ***Cálculo aplicado: curso rápido***, de Larson (2011); ***Cálculo***, de Thomas, Weir e Hass (2002); a obra ***Fundamentos da Física***, de Halliday e Resnick (1994); e a obra ***Princípios da Física***, de Serway e Jewett (1994).

Suponha que você está analisando um projeto arquitetônico desenvolvido pela sua equipe de trabalho, e a sua responsabilidade é realizar as especificações técnicas no memorial descritivo. No momento, você está analisando a planta baixa do pavimento térreo conforme a ilustração a seguir:

Figura 10 - Planta baixa do térreo de uma residencia

Descrição da Imagem: ilustração de uma planta baixa do térreo de uma residência, com a indicação de garagem para dois carros, cozinha, sala de estar, acesso ao pavimento superior e área de lazer com piscina.

Considerando as unidades de medidas, quais seriam as aplicações delas no desenvolvimento do memorial descritivo? Elencaremos alguns pontos que necessitam das unidades de medidas para o desenvolvimento desse memorial:

- Cotagem das dimensões horizontais da planta baixa, indicadas em metro linear (m).
- Cálculo de áreas de cada ambiente, indicado em planta (m^2).
- Cálculo da paginação de piso para aplicação do revestimento (m).
- Cálculo das áreas de superfícies para aplicação de pinturas (m^2).
- Cálculo da área permeável (m^2).
- Cálculo dos volumes de água da piscina em metros cúbicos (m^3) e conversão em litros (l).

Para a execução desses tipos de cálculo, é preciso retomar o que estudamos anteriormente, na Unidade 4, a respeito do cálculo de áreas de superfícies e do cálculo de volumes de sólidos e associar com a unidade de medida correspondente para cada situação. Você listou algumas dessas unidades?

A partir do termo central “grandezas”, podemos produzir um mapa mental, estabelecendo relações com as unidades de medidas e as aplicações na Matemática e na Física, conforme o exemplo ilustrado a seguir.

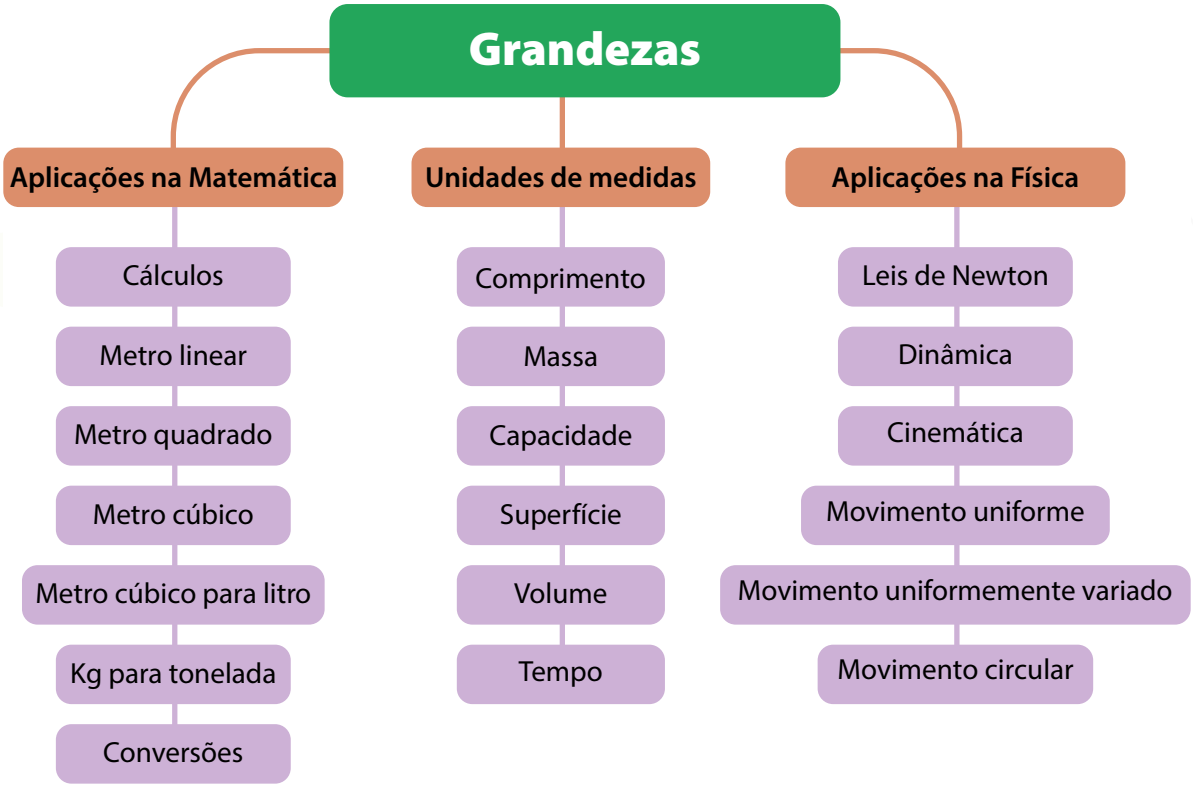


Figura 11 - Mapa mental sobre grandezas / Fonte: a autora.

Utilize o exemplo e complemente-o com as suas anotações de cada tópico abordado nesta unidade, bem como as informações relevantes de cada tópico.

MAPA MENTAL

1. Leia o texto a seguir:

   Um reservatório no formato cúbico possui o volume de 512 m³, que corresponde a _____ litros de água. Considerando que ele está completamente cheio e desprezando a espessura da superfície, podemos inferir que a altura desse reservatório é de _____.

   Considerando as informações anteriores, assinale a alternativa que completa corretamente e respectivamente as lacunas.

   a) 5120 e 7 m.
   b) 512000 e 8 m.
   c) 51200 e 9 m.
   d) 51200 e 8 m.
   e) 512000 e 7 m.

2. Em uma inspeção de um sistema hidráulico, verificou-se um vazamento de água, em que, a cada 3 segundos, uma gota de água pinga, e cada gota corresponde, em média, a 0,4 mL. Considerando que o vazamento ocorre a 24 horas, qual é a quantidade correta de água desperdiçada? Assinale a alternativa que corresponde ao valor correto.

   a) 0,47 litros.
   b) 3,5 litros.
   c) 11,52 litros.
   d) 12,84 litros.
   e) 22,48 litros.

3. Considere que três cidades, indicadas por A, B, e C, estão localizadas em uma mesma rodovia. Um automóvel sai de A, efetua um deslocamento do Km 100 até o km 200, chegando em C, e, posteriormente, retorna pelo mesmo trajeto do km 200 até o km 150, chegando em B. Por meio dos conhecimentos obtidos nesta unidade, responda: qual é o deslocamento total desse automóvel?

MEU ESPAÇO

Noções de equilíbrio e movimento dos corpos

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, trataremos sobre os conceitos relacionados ao movimento. Em um primeiro momento, ao considerar como referência o espaço unidimensional, discutiremos sobre o movimento uniforme e o movimento variado uniformemente; posteriormente, realizaremos uma analogia para aplicar esses conceitos ao espaço tridimensional por meio do relacionamento com grandezas vetoriais. A partir desses conceitos, discutiremos a aplicação para o centro de massa de um corpo, tratando da questão relacionada ao equilíbrio. Bons estudos!

Para executar a construção de prédios, são necessários cálculos estruturais para analisar a carga suportada pela fundação e a locação dos pilares que sustentam a edificação. A escolha do sistema estrutural é de vital importância para o sucesso da construção da edificação, isso depende do tipo de material e da altura do edifício. Nesse caso, o objetivo é que a estrutura estabilize os efeitos dos ventos e das forças atuantes, minimizando as vibrações existentes, levando cargas horizontais e verticais eficientemente até a fundação. Observe a ilustração de um prédio em construção.

Figura 1 - Imagem de um prédio em construção

Descrição da Imagem: foto de um edifício que está em construção em concreto armado, evidenciando a estrutura adotada nos pavimentos.

Na imagem, verificamos a estrutura adotada em concreto armado para suportar as cargas atuantes. Nesse caso, os pilares atuam direcionando as cargas recebidas até a fundação. Como definir a estrutura para que se mantenha estável e em equilíbrio? Como obter o centro de massa das seções dessa edificação para a distribuição das forças atuantes?

Para a construção de um prédio de alvenaria convencional, a primeira etapa é a construção da fundação; depois, são alocados os pilares, as vigas e as lajes do sistema estrutural, de modo que as cargas sejam direcionadas para a fundação. Esses elementos fazem parte da estrutura para a sustentação da edificação, somente quando a estrutura está definida é que se realiza a vedação em geral com blocos cerâmicos ou de concreto e, posteriormente, os acabamentos necessários. Essa é a forma de construção mais utilizada no Brasil. É vantajosa porque:

- Suporta grandes vãos.
- Possui disponibilidade de materiais e mão de obra.
- Não há grandes exigências de mão de obra qualificada.
- Possibilita futuras reformas e/ou mudanças de projeto.

Tem como desvantagens:

- Apresenta um maior custo em relação a outros sistemas construtivos.
- Possui maior tempo de execução quando comparada a outros métodos.
- Gera grande quantidade de resíduos.

Veja, na sequência, a ilustração dessas etapas.

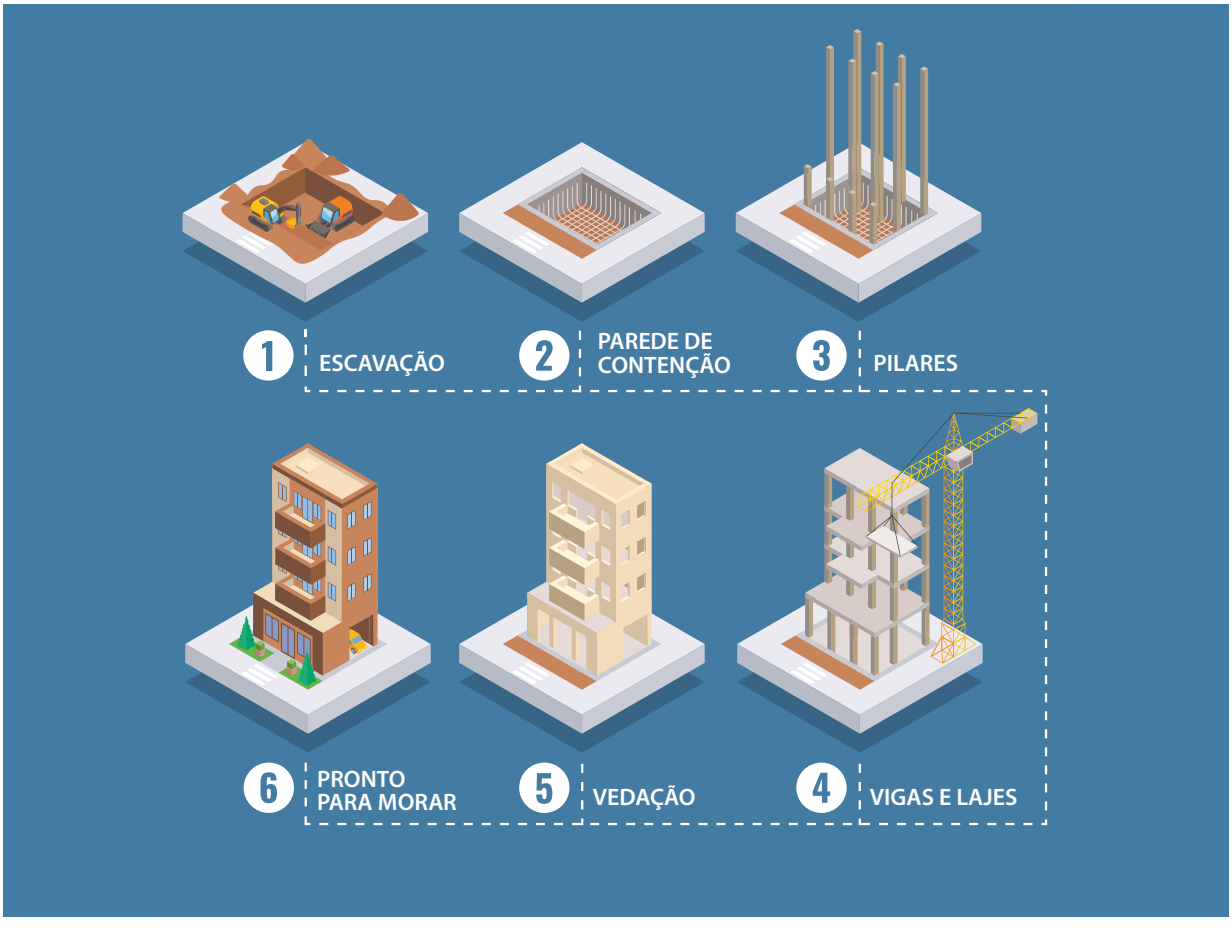


Figura 2 - Etapas da construção de um prédio

Descrição da Imagem: ilustração com várias etapas da construção de um prédio. Na primeira e na segunda etapas, mostra-se o preparo da fundação; na terceira e na quarta etapas, a construção do sistema estrutural; e na quinta e na sexta etapas, os fechamentos e acabamentos.

Na imagem, vimos as etapas executivas da construção de um prédio, em que, na primeira e segunda etapas, temos a preparação e a construção da fundação. Na terceira e na quarta, temos a construção do sistema estrutural, ilustrando a locação dos pilares, das vigas e dos lajes. Somente após essas etapas, é que são realizados os fechamentos e acabamentos necessários para a finalização da construção do edifício. É importante que a estrutura e as vedações sejam construídas niveladas e no prumo, pois as paredes sustentam a edificação e precisam manter o equilíbrio na distribuição de cargas.

Na etapa de elaboração do projeto executivo de um prédio, são necessários cálculos estruturais que determinarão, por exemplo, a posição da alocação dos pilares na fundação e o dimensionamento das vigas e lajes. Um dos conceitos necessários para a determinação dessa posição é o centro de massa ou, como também é conhecido, o ponto de equilíbrio.

O centro de massa consiste em um ponto no qual a massa de um corpo está concentrada, e as forças externas atuam nesse ponto. Também, existe o centro de gravidade, que seria o ponto no qual o peso de um corpo atua. Há situações em que ambos os pontos são coincidentes, e outras em que são divergentes, isso depende se há atuação da aceleração da gravidade. Vejamos a ilustração de um experimento.

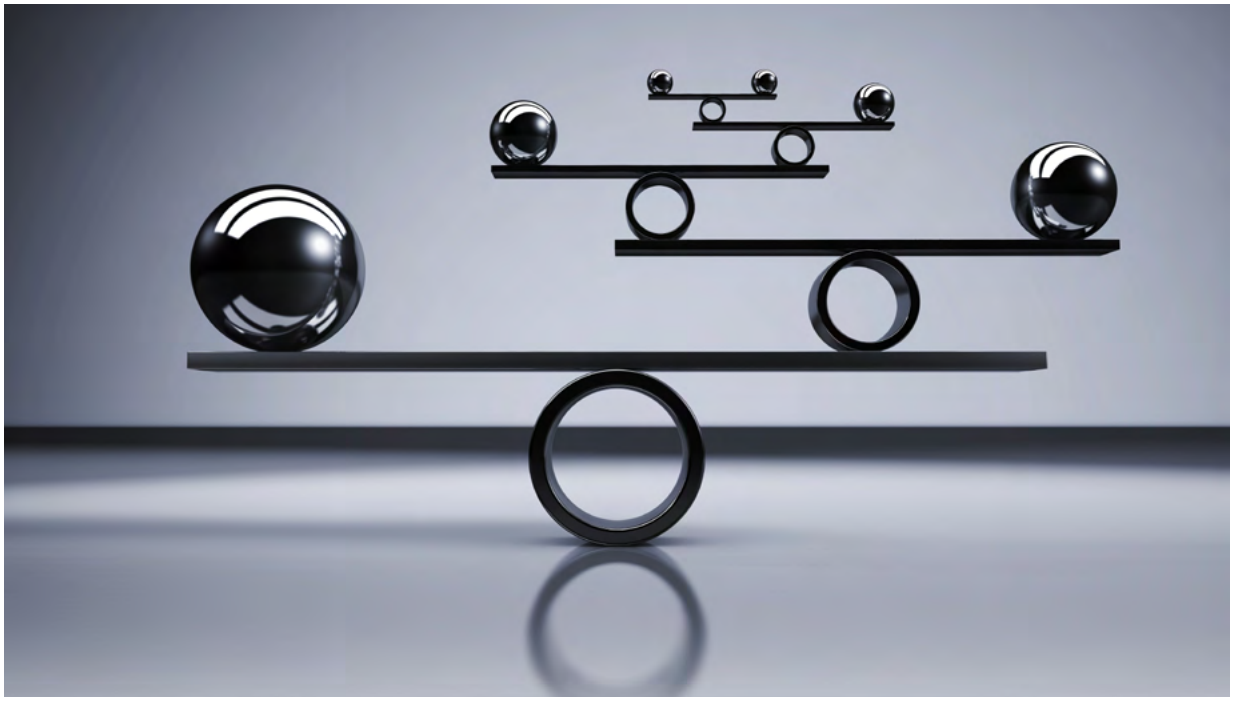


Figura 3 - Experimento da aplicação do centro de massa

Descrição da Imagem: ilustração de um experimento em que são colocados suportes cilíndricos e esferas em uma estrutura apoiadas por barras horizontais, dispostas em cinco níveis, em que se mantém o equilíbrio.

No experimento, os objetos são dispostos na posição em que as forças atuantes se neutralizam e mantêm o equilíbrio, é o principio utilizado na determinação do centro de massa, que é aplicado para posicionar os pilares em um sistema estrutural de uma edificação, como, por exemplo, um prédio. Para fazer um experimento prático, você pode empilhar diversos livros na borda de uma mesa, de modo que formem uma torre inclinada, que simula um desafio à gravidade. Inicie com uma pilha vertical; na sequência, desloque o livro mais alto na pilha o máximo possível, sem que ele caia. Em seguida, mova os dois livros superiores juntos até o limite, sem que caiam. Repita esse procedimento o máximo de vezes possível. Observe que quanto maior o número de livros movidos, menor a distância que eles podem ser movidos sem que todos caiam. O empilhamento é possível devido à atuação do centro de gravidade.

O exemplo prático apresentado ilustra o princípio de como escadas, sacadas e outras partes de edificações permanecem em balanço, sem comprometer a estrutura da edificação e se mantendo em equilíbrio. Para definirmos os conceitos sobre equilíbrio, precisamos saber como é o entendimento de movimentos para a Física, analisando de modo unidimensional e tridimensional, neste último caso, baseado em grandezas vetoriais para análise da distribuição de força. A partir disso, podemos entender os tópicos específicos para ilustrar aplicações, como o centro de massa.

DIÁRIO DE BORDO

O movimento pode ser verificado nas mais diversas atividades diárias. O planeta Terra apresenta diversos movimentos. Nesse sentido, a Física é o ramo do conhecimento que expõe como os movimentos evoluíram e foram descritos no decorrer do tempo.

De modo geral, estudamos o movimento de um corpo qualquer — que pode ser uma pessoa, um veículo, uma partícula —, levando em consideração os princípios de localização do móvel em um instante qualquer, adotando-se coordenadas unidimensional.

Quanto à localização de um corpo, ela está relacionada com o referencial utilizado, em que se analisarão as posições de outros corpos. Para localizar um corpo no espaço físico, é preciso adotar três coordenadas. Vejamos um exemplo:

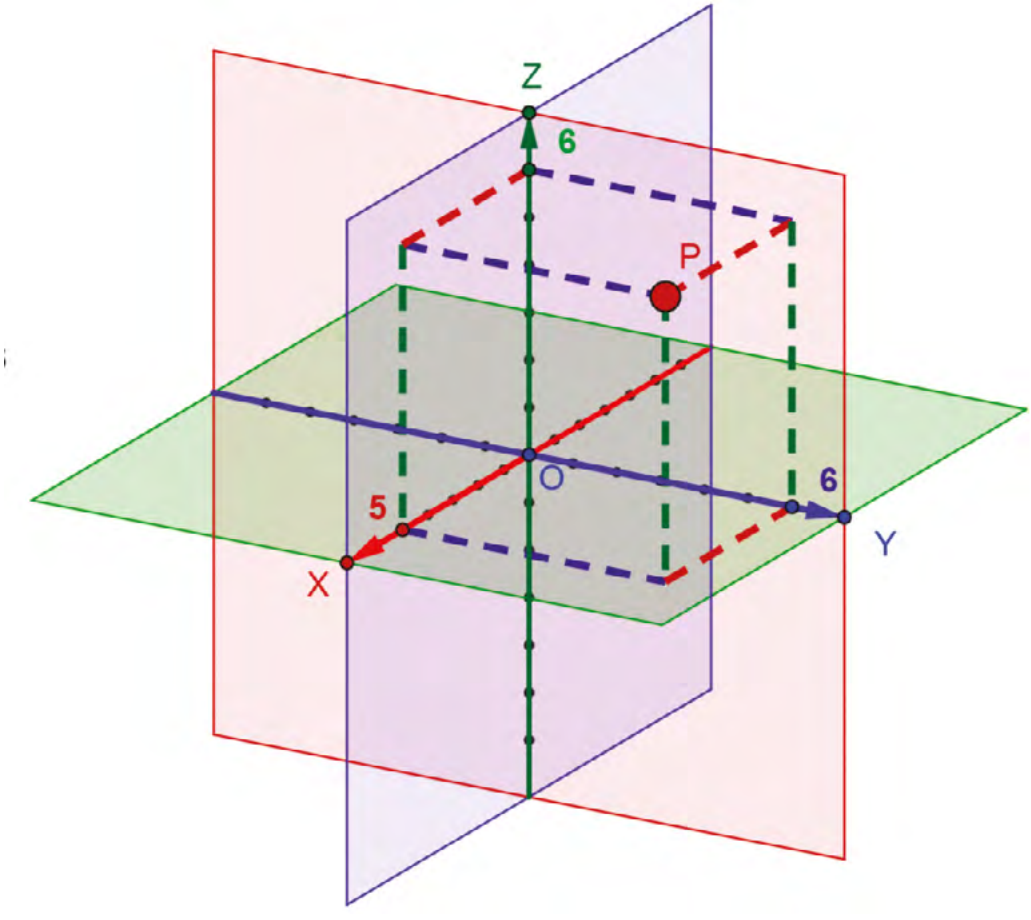


Figura 4 - Ponto inserido no sistema de coordenadas cartesianas / Fonte: GeoGebra ([2021], on-line)[1].

Descrição da Imagem: ilustração de três planos ortogonais entre si, indicando os eixos x, y, z e um ponto que possui variação das coordenadas de acordo com as posições adotadas pela manipulação dos dados iniciais.

Para explorar de modo dinâmico, acesse o QR Code que leva até a animação do sistema de coordenadas e modifique as orientações dos eixos e a posição, analisando como o ponto é inserido no espaço físico.

O movimento é relativo, existe em relação a determinado referencial, em determinada trajetória. Quando o movimento de um corpo é unidimensional, a sua posição é indicada por uma única coordenada, à qual se atribui uma medida algébrica, podendo ser positiva ou negativa, nomeada espaço, que define a posição de corpo. Considere a ilustração a seguir:

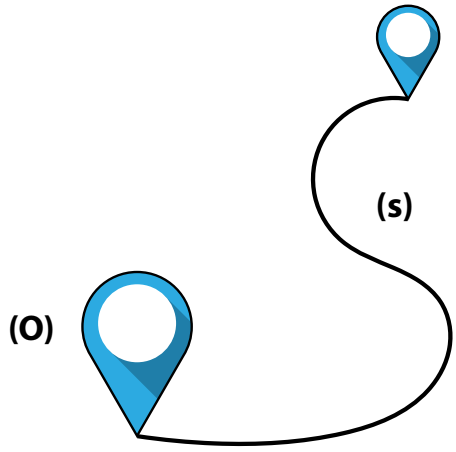


Figura 5 - Ilustração de trajetória e indicação do espaço

Descrição da Imagem: ilustração de um marco inicial, considerado origem, para uma trajetória em forma de s, e o marco final indica o ponto final.

Um dos ramos da Física é o estudo dos movimentos. Nesse sentido, quando podemos afirmar que um corpo está ou não em movimento? Um corpo está em movimento quando muda de posição no decorrer do tempo. Se, em um período de tempo, a posição for constante, podemos afirmar que ele está em repouso.

Representemos o espaço pela letra (s). Ele é determinado ao longo de uma trajetória, da distância em que se encontra o corpo ao ponto de referência adotado como origem (O). A orientação é arbitrária, podendo ser em ambos os sentidos. Com relação à unidade do espaço, são adotadas as do SI, com o metro (m) sendo a unidade fundamental, mas, para grandes deslocamentos, como, por exemplo, em rodovias, é mais conveniente usar o quilômetro (km).

Observamos que o espaço indica apenas a posição do móvel em um determinado instante, mas não permite afirmar se ele está em movimento ou em repouso, além disso, o espaço não é indicação de distância percorrida. Se um corpo muda de posição, afirmamos que houve um deslocamento escalar, denotado por Δs, definido por:

O deslocamento escalar (Δs) é dado pela diferença entre o espaço final (s_f) e o espaço inicial (s_i) do corpo, sendo que: $\Delta s = s_f - s_i$

Se um deslocamento escalar for positivo, não implica que o movimento tenha ocorrido na orientação da trajetória. Se o deslocamento escalar for negativo, não significa que o móvel tenha se movimentado sempre em sentido contrário da orientação da trajetória. Ainda, se o deslocamento escalar for nulo, não significa necessariamente que o corpo permaneceu em repouso.

A rapidez com que um corpo muda de posição em determinado intervalo é chamada de velocidade escalar média, podendo ser compreendida apenas como deslocamento escalar ocorrido em um intervalo de tempo, e é definida por:

Velocidade escalar média (V_m) é dada pela razão entre o deslocamento (Δs) e o respectivo intervalo de tempo (Δt), sendo:

$$V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t}$$

Vejamos um exemplo: considere uma distância de 1200 km percorrida por um veículo no período de 15 h, sendo que, na metade do trajeto, realizou-se uma parada de 1 h, temos que:

- A velocidade média é dada por: $V_m = \frac{\Delta_s}{\Delta_t} = \frac{1200}{15} = 80\ km/h$.

Analisando a velocidade média, podemos afirmar que, em alguns trechos, a velocidade pode ser acima dessa média e, em outros, abaixo dela, sendo que, no momento de parada, a velocidade foi zero. Por meio do exemplo, podemos interpretar que a velocidade pode assumir diferentes valores, desde zero até a velocidade máxima permitida.

Vejamos um exemplo de velocímetro indicado no painel de um veículo:

Figura 6 - Imagem de um velocímetro de um veículo

Descrição da Imagem: imagem de um painel de carro, em que, na parte central, há um velocímetro marcando de 0 a 200 km/h, utilizado para marcação da velocidade instantânea.

No velocímetro, indica-se a velocidade no momento da leitura, o que denominamos velocidade escalar instantânea. Esse tipo de informação é relevante quando é preciso analisar o comportamento da velocidade durante um movimento, sendo associada com a velocidade a cada instante. Pode ser diferente da velocidade média, que relaciona o deslocamento total associado em determinado intervalo de tempo.

A variação da velocidade escalar instantânea para um intervalo de tempo determinado é chamada de aceleração escalar. Com base nisso, podemos definir:

Denominamos aceleração escalar média (a_m) a razão entre a variação da velocidade escalar instantânea (Δv) e o seu respectivo intervalo de tempo (Δt), sendo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Com base no SI, adotamos o metro por segundo ao quadrado (m/s²) como unidade da aceleração escalar.

Os movimentos são classificados de acordo com o comportamento da velocidade e da aceleração. Um corpo pode se movimentar no sentido da orientação positiva da trajetória ou no sentido contrário, de modo que, na orientação positiva, a velocidade também é considerada positiva, e o movimento é progressivo; e, na orientação negativa, a velocidade é negativa, e o movimento é chamado de retrógrado.

Com relação à rapidez de um corpo, ou seja, o valor da velocidade indicado em módulo, temos que:

- Movimento uniforme: a rapidez é constante, a aceleração é nula.
- Movimento acelerado: a rapidez aumenta, a velocidade e a aceleração possuem o mesmo sinal.
- Movimento retardado: a rapidez diminui, a velocidade e a aceleração possuem o sinal contrário.

Com base nisso, podemos verificar que a aceleração ser negativa não implica em que o corpo esteja freando. Para definir se o corpo está acelerado ou freando, é preciso analisar os sinais da velocidade e da aceleração.

No movimento uniforme (M. U.), um corpo qualquer se movimenta com velocidade escalar constante, não há variação de velocidade escalar, assim, a velocidade escalar é nula, ou seja:

Figura 7 - Infográfico sobre o movimento uniforme e a velocidade constante / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico sobre o movimento uniforme, que relaciona que a velocidade escalar constante implica em aceleração escalar nula.

Quando consideramos o ato de dirigir, precisamos acelerar para aumentar a velocidade do carro ou, ainda, para manter a velocidade em um trajeto de aclive. Entretanto, em Física, entende-se aceleração como variação de velocidade por unidade de tempo: se não houver variação de velocidade, não há aceleração.

Relaciona-se o deslocamento escalar (Δs) com a velocidade escalar constante (v) por meio de:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Sendo que:

$$\Delta s = s_f - s_i$$

$$s_f - s_i = v \cdot \Delta t$$

$$s_f = s_i + v \cdot \Delta t$$

Ao representarmos o espaço inicial por (s_0), obtido quando tempo $t = 0$, e o espaço final por (s), temos a função horária do movimento uniforme expressa por:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Para que seja localizado um corpo, é necessário que as trajetórias sejam numeradas e orientadas. Desse modo, se o sentido do movimento coincide com o sentido positivo da trajetória, a velocidade do móvel é positiva; caso contrário, é negativa. No movimento progressivo, o espaço aumenta com o tempo; já no movimento retrógrado, o espaço diminui com o tempo. Considere a seguinte tabela de um corpo em função do tempo:

t (s)	*s (m)*
0	-30
2	-20
4	-10
6	0
8	10
10	20
12	30
14	40
16	50
18	60

Tabela 1 - Exemplo de espaços de um móvel em função do tempo / Fonte: a autora.

Ao analisar os dados, identificamos que o movimento é uniforme, pois o corpo percorre deslocamentos iguais para intervalos de tempos iguais, ou seja, $\Delta t = 2\ s$ e $\Delta s = 10\ m$. O movimento é considerado progressivo, pois os valores do espaço aumentam conforme aumenta o tempo. Podemos definir a velocidade constante por meio de:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10}{2} = 5\ m/s$$

Analisando o tempo $t = 0$, temos $s_0 = -30$. Para obtermos a função horária do espaço:

$$s = s_0 + v \cdot t$$
$$s = -30 + 5t$$

Podemos expressar, graficamente, as grandezas do movimento uniforme. Com relação à velocidade escalar, por ser constante para o movimento uniforme e ser positiva, temos o movimento progressivo, sendo indicada por:

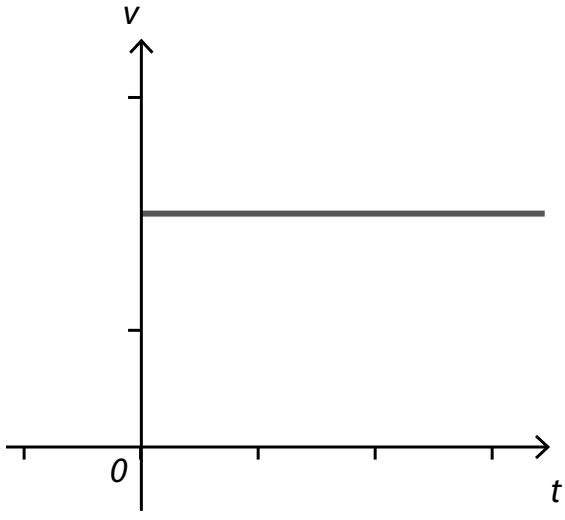


Figura 8 - Velocidade escalar positiva / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama horário da velocidade escalar positiva para o movimento uniforme e progressivo.

Sendo constante para o movimento uniforme e negativa, temos o movimento retrógrado, sendo representada por:

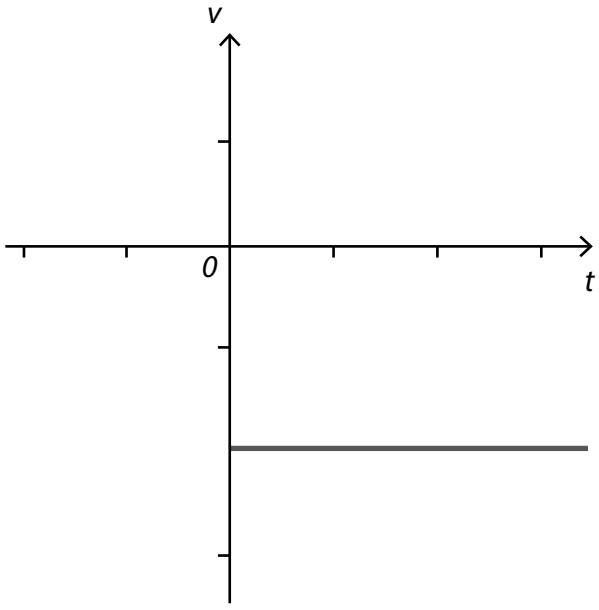


Figura 9 - Velocidade escalar negativa / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama horário da velocidade escalar negativa para o movimento uniforme e retrógrado.

Com relação à função horária do espaço, podemos associar que o espaço varia de acordo com o tempo, assim, temos que o gráfico corresponde a uma reta inclinada, sendo que o movimento progressivo é expresso por:

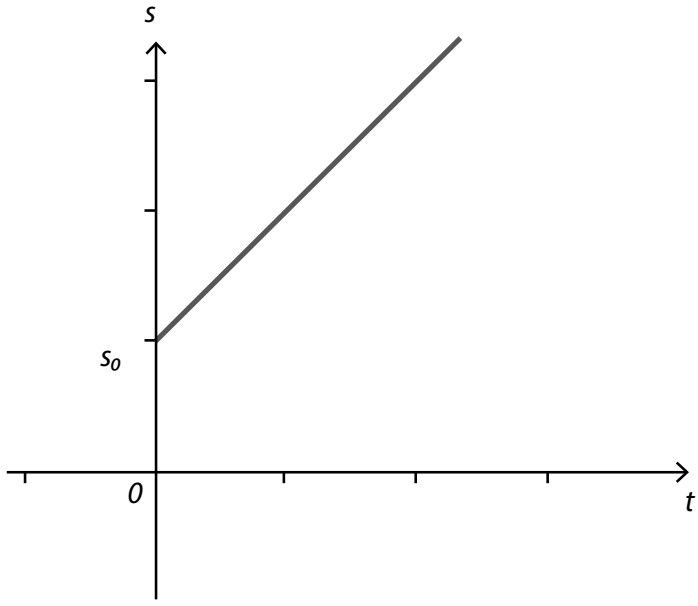


Figura 10 - Movimento uniforme progressivo (v > 0) / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta crescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial.

Já o movimento retrógrado é expresso por:

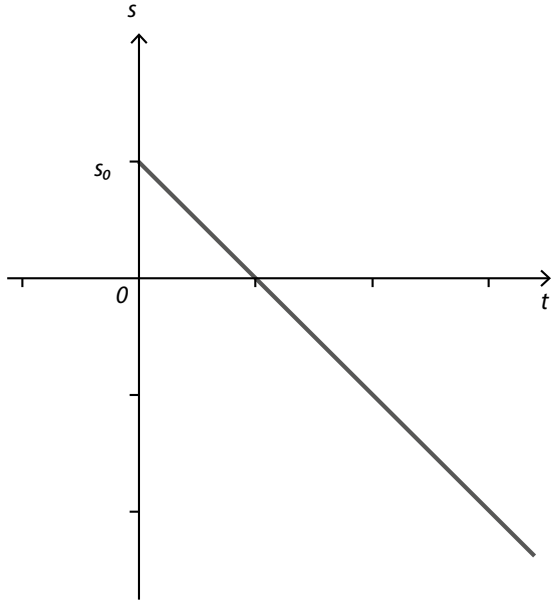


Figura 11 - Movimento uniforme retrógrado (v < 0) / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta decrescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial.

Ao realizar o estudo de movimentos, podemos prever o instante e a posição que dois corpos se encontram ou, ainda, quanto tempo um corpo leva para ultrapassar o outro.

Uma interpretação geométrica para o deslocamento escalar pode ser dada por:

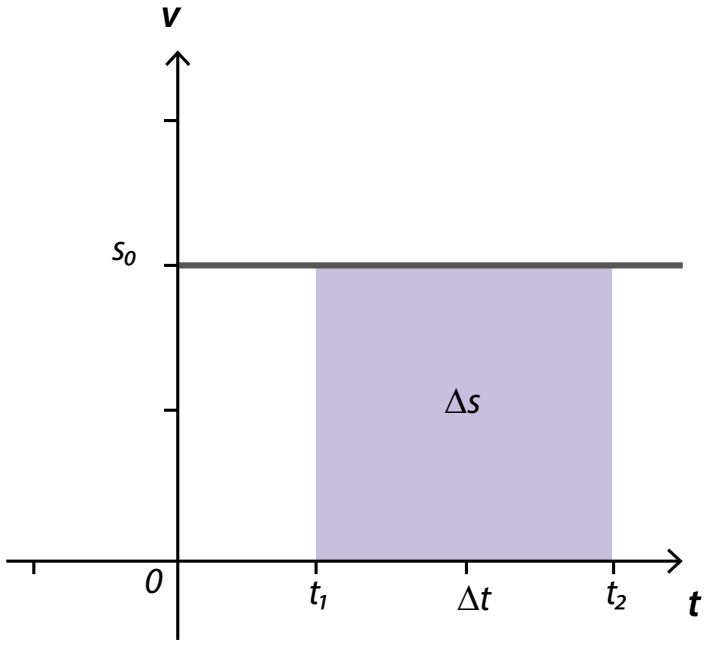


Figura 12 - Interpretação geométrica da área / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama com a área aplicada em uma região retangular entre a reta e o eixo horizontal.

Vimos que $\Delta s = v \cdot \Delta t$, geometricamente, o produto $v \cdot \Delta t$ corresponde à área do retângulo destacado no gráfico anterior, ou seja, Δs é equivalente à área do retângulo. Outra consideração que temos é a respeito da velocidade escalar. Vejamos a ilustração a seguir:

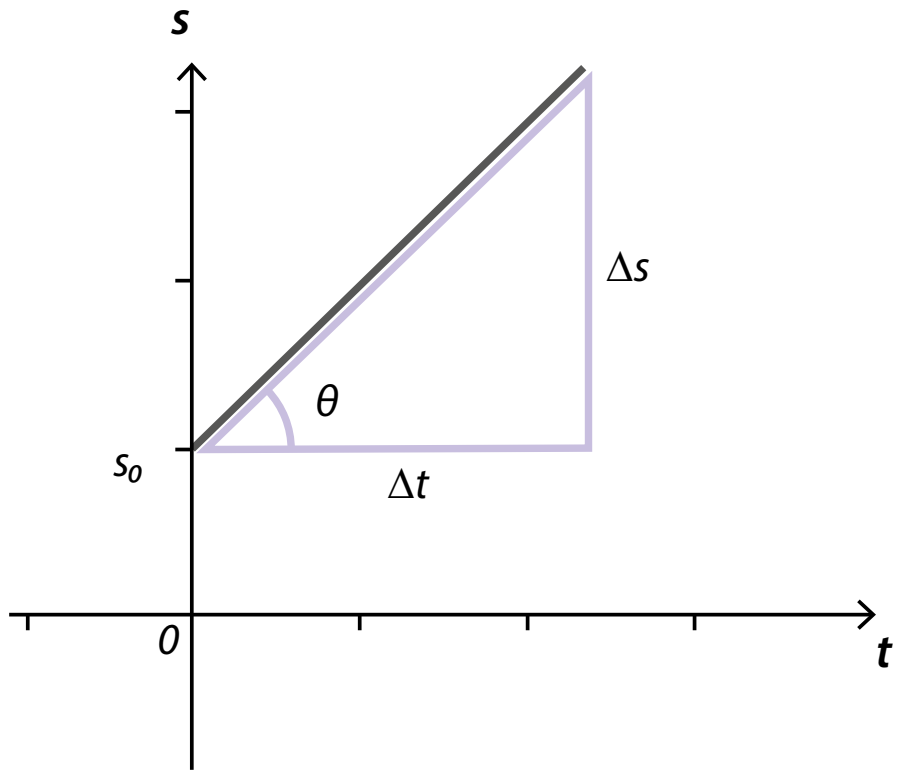


Figura 13 - Movimento uniforme retrógrado (v < 0) / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta decrescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial.

Considerando o ângulo θ como referência na formação do triângulo retângulo, o cateto oposto é dado por Δs, e o cateto adjacente, indicado por Δt. A hipotenusa é determinada pela função horária do espaço no intervalo definido. Então, temos que:

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx tg\ \theta$$

Outro tipo de movimento é o movimento variado uniformemente (M.V.U.). Nesse caso, ocorre a aceleração, e a velocidade escalar varia uniformemente no decorrer do tempo, ou seja, ocorre que a velocidade varia em quantidades iguais em intervalos de tempos iguais, assim, temos:

Figura 14 - Infográfico sobre o M.V.U. e a velocidade que varia uniformemente / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico sobre o movimento variado uniformemente, o qual se relaciona com a velocidade escalar, a qual varia no decorrer do tempo e implica em aceleração escalar constante.

Vejamos o exemplo a seguir.

Considere os dados da tabela:

$t\ (s)$	$v\ (m/s)$
0	3
2	9
4	12
6	15
8	18
10	21
12	24
14	27
16	30
18	33

Tabela 2 - Exemplo de espaços de um móvel em função do tempo / Fonte: a autora.

Temos que, para cada intervalo de $2\ s$, a velocidade sofre uma variação de $3\ m/s$, ou seja, a variação da velocidade escalar é constante em relação ao tempo. Consideramos que a variação da velocidade é dada por $1,5\ m/s$ para cada segundo ou, ainda, $1,5\ m/s^2$. Essa variação da velocidade é considerada a aceleração do movimento.

A aceleração escalar é constante durante todo o intervalo de tempo em que ocorre o movimento. Quando positiva, é possível representá-la da seguinte forma:

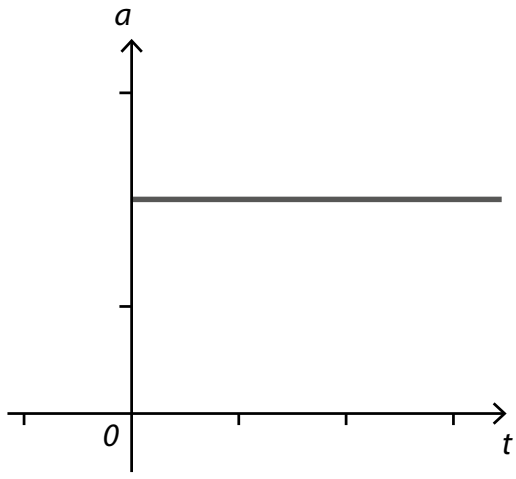


Figura 15 - Aceleração escalar positiva / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama horário da aceleração escalar positiva para o movimento variado uniformemente.

A aceleração também pode ser constante e negativa, sendo representada por:

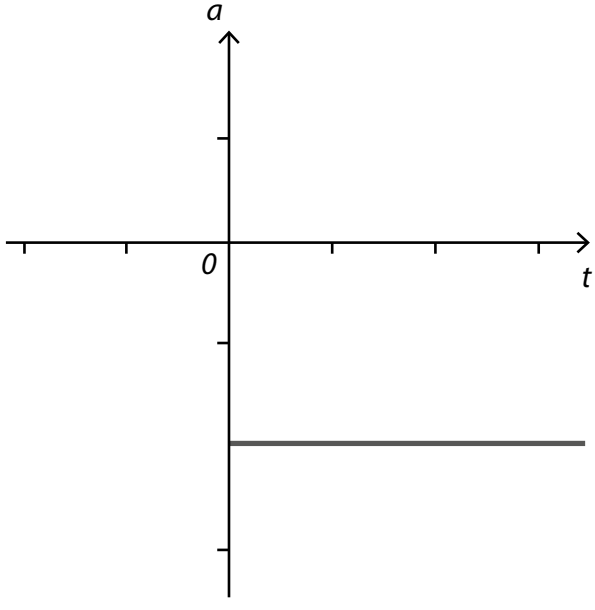


Figura 16 - Aceleração escalar negativa / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama horário da aceleração escalar negativa para o movimento variado uniformemente.

Ao tomarmos um intervalo de tempo, podemos calcular a área da região entre a reta que indica a aceleração e o eixo horizontal, de modo que corresponda, numericamente, à variação da velocidade escalar (Δv), sendo que:

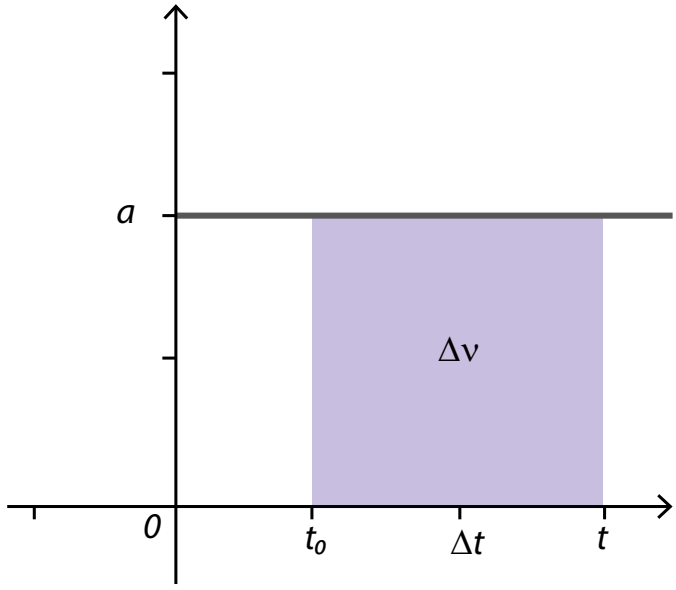


Figura 17 - Interpretação geométrica da área / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama com a área aplicada em uma região retangular entre a reta e o eixo horizontal.

Segue que:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

Uma das partes práticas da Física é o estudo dos movimentos uniforme e uniformemente variado. Para compreensão desses conceitos, propomos um roteiro de estudo. Prepare seus materiais e realize o experimento indicado no QR Code a seguir.

Temos que o Δv corresponde à área da região retangular entre a reta e o eixo no intervalo estabelecido, sendo que a aceleração escalar instantânea no M.V.U. equivale à aceleração escalar média, logo:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Adotando $\Delta v = v - v_0$ e $\Delta t = t - t_0$, para $t_0 = 0$, temos:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow v = v_0 + at$$

É denominada função da velocidade escalar para o M.V.U., em que é possível determinar a velocidade escalar de um móvel a qualquer instante se for possível determinar a velocidade inicial e a aceleração do movimento. O gráfico dessa função é linear. Para a aceleração positiva, temos uma função crescente:

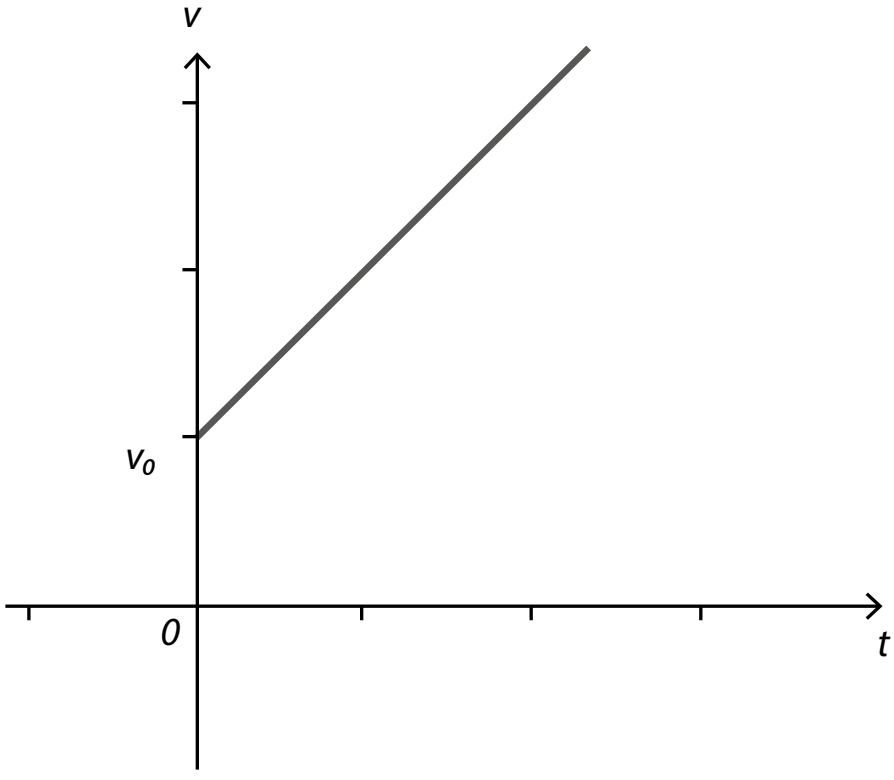


Figura 18 - Função crescente para a aceleração positiva / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta crescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial.

Para a aceleração negativa, temos:

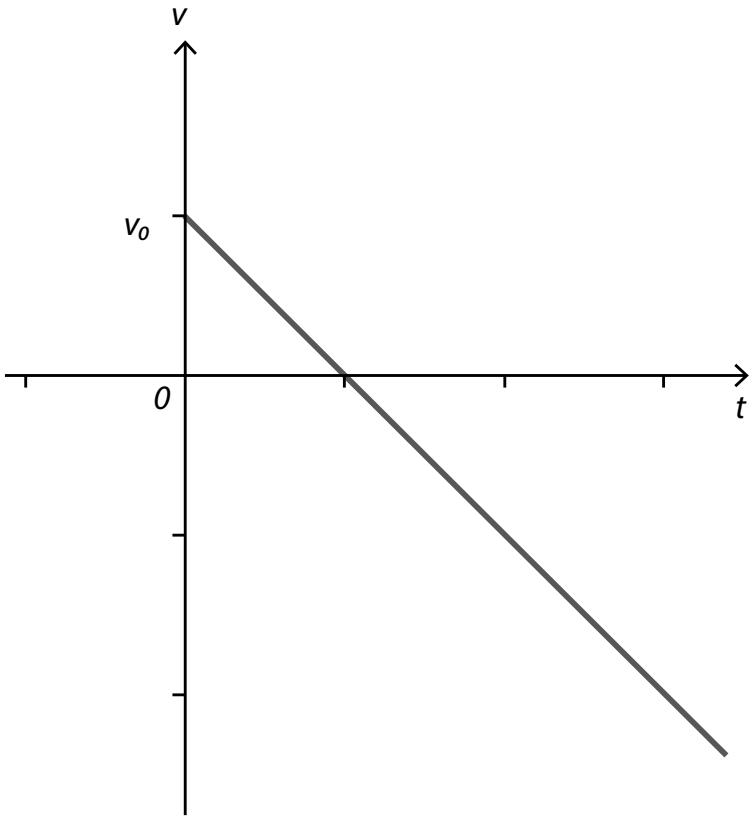


Figura 19 - Função decrescente para a aceleração negativa / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta decrescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial.

Além disso, a aceleração escalar pode ser associada numericamente com a inclinação da reta por meio da tangente do ângulo. Vejamos um exemplo:

Um veículo se desloca em uma rodovia a uma velocidade de 54 km/h, ou seja, corresponde a 15 m/s; em um determinado momento, o veículo é acelerado e, depois de 5 segundos, atinge a velocidade de 90 km/h, isto é, 25 m/s. Se a aceleração foi constante, podemos expressar, graficamente, por meio de:

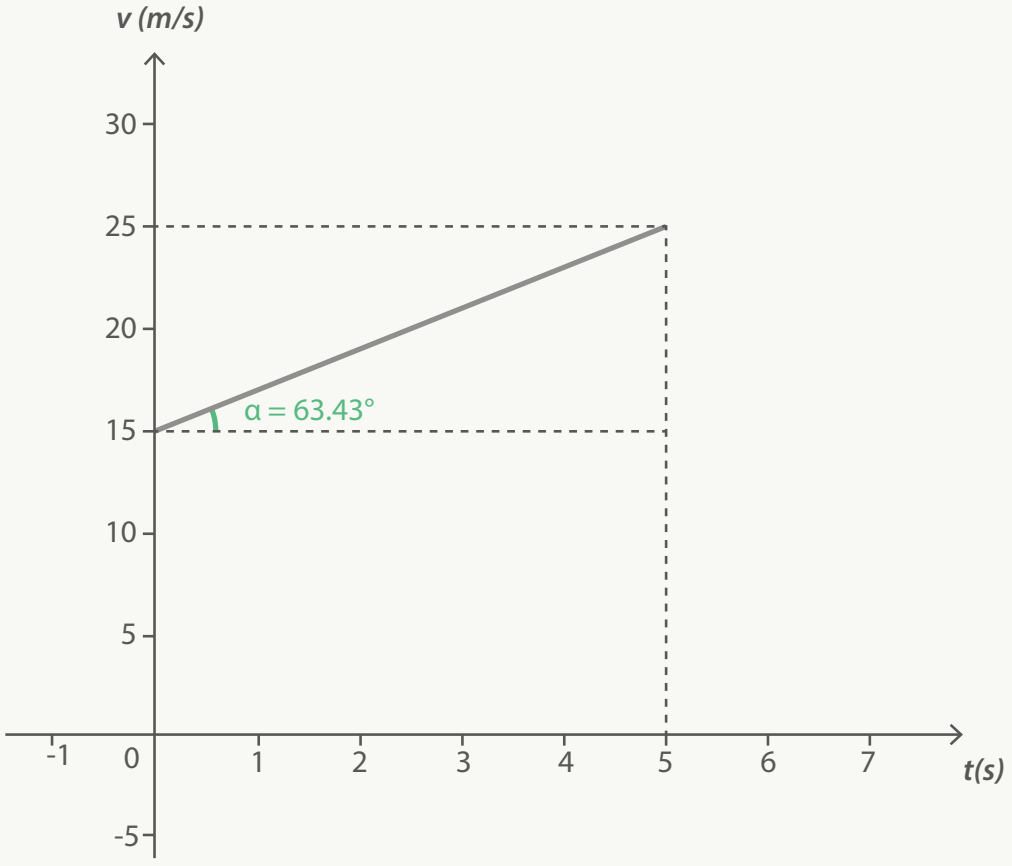


Figura 20 - Função crescente para a aceleração positiva, relacionando velocidade instantânea e tempo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta crescente, inserida no plano cartesiano e indicada no primeiro quadrante a partir do tempo inicial, sendo a velocidade inicial de 15 m/s.

Temos que o valor numérico da velocidade escalar é dado por:

$$a = tg\ \theta \rightarrow a = \frac{25-15}{5} = 2\ m/s^2$$

Desse modo, a função da velocidade escalar é indicada por:

$$v = v_0 + at$$

Como $v_0 = 15$ m/s e $a = 2\ m/s$:

$$v = 15 + 2t$$

Com base no exposto anteriormente, é possível estabelecer uma generalização para o cálculo do M.V.U. no espaço. É preciso considerar a região do trapézio indicada no gráfico a seguir:

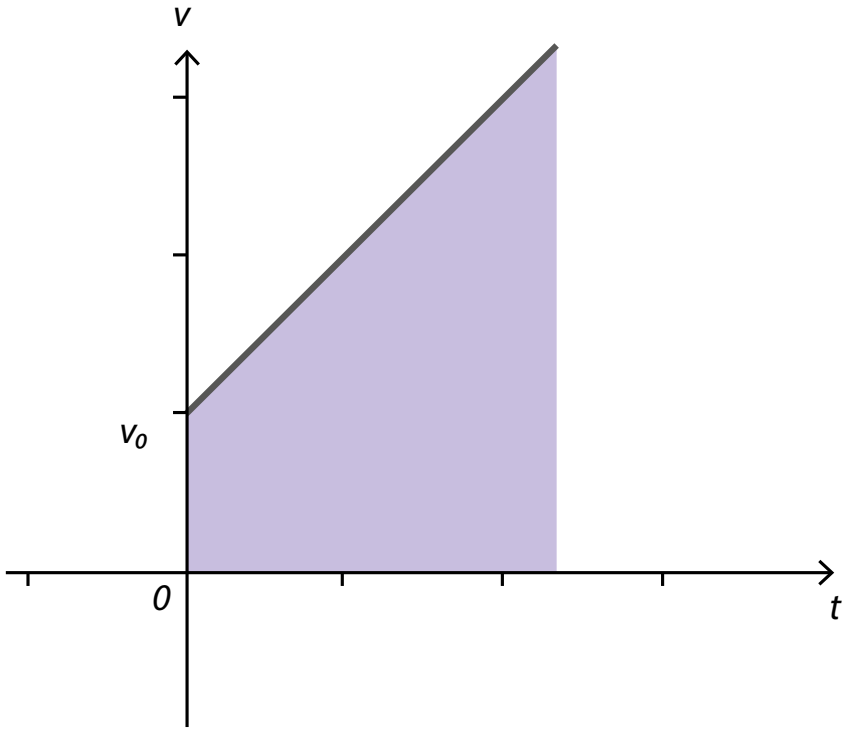


Figura 21 - Função crescente para a velocidade positiva / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma reta crescente para a velocidade positiva, com indicação de trapézio abaixo da reta expressa pela função linear.

Temos que Δs corresponde à área do trapézio indicado, de modo que:

$$\Delta s = \frac{v + v_0}{2} .t$$

Como $v = v_0 + at$, ao substituirmos na expressão, temos:

$$\Delta s = \frac{v_0 + at + v_0}{2} \cdot t$$

$$\Delta s = \frac{2v_0 t + at^2}{2}$$

$$\Delta s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Com essa função, podemos determinar o deslocamento escalar para um corpo com instante inicial $t = 0$ até um momento qualquer, sendo dada a velocidade inicial e a aceleração escalar do M.V.U. Determinando a função horária do espaço, temos que:

$$\Delta s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Por ser expressa na forma de uma função quadrática, a representação gráfica é dada por uma parábola, de modo que, para a aceleração positiva, temos:

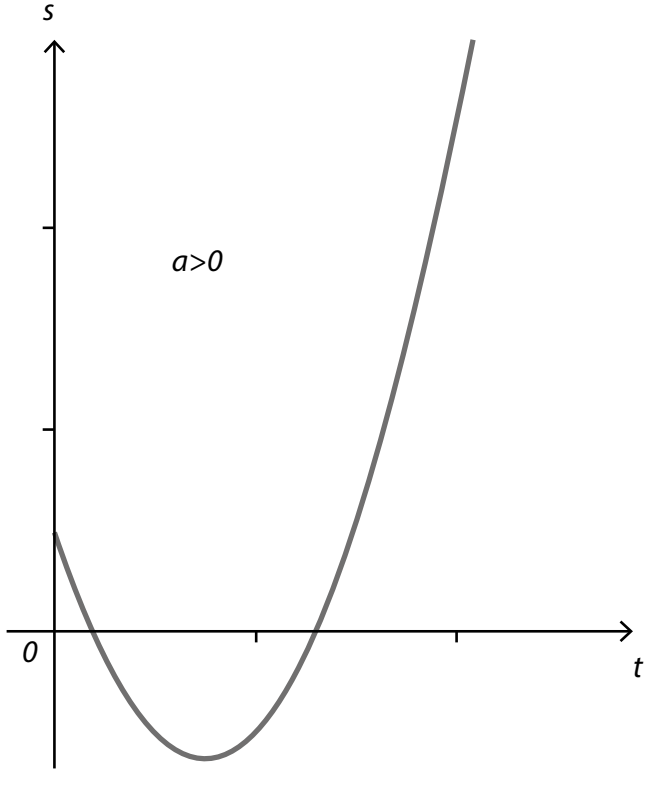


Figura 22 - Função quadrática com concavidade para cima / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma parábola com concavidade voltada para cima, indicando uma aceleração positiva.

Para a aceleração negativa, temos:

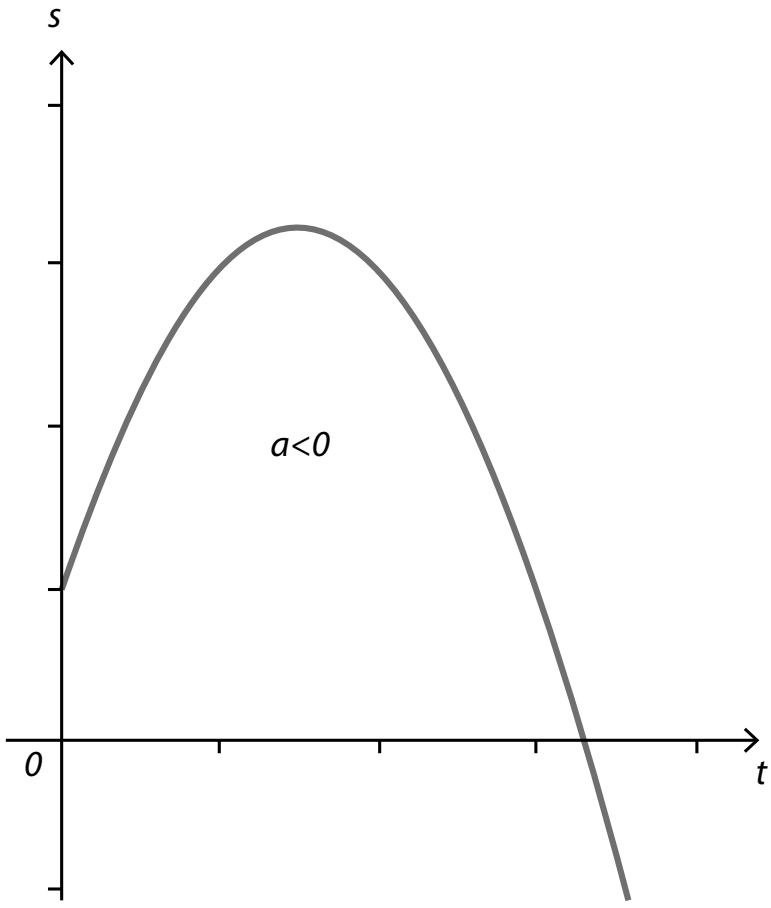


Figura 23 - Função quadrática com concavidade para baixo / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um diagrama da função horária com uma parábola com concavidade voltada para baixo, indicando uma aceleração negativa.

Vimos, até o momento, os movimentos uniformes e os movimentos variados uniformemente, além desses casos, podemos analisar diversos tipos de movimentos, como, por exemplo:

- Movimentos circulares.
- Movimento de projéteis.

No caso do movimento de projéteis, é um caso particular de movimento em duas dimensões. Você pode aprofundar os seus conhecimentos ao acessar o QR Code e estudar mais sobre o assunto.

Quando analisamos os movimentos no espaço unidimensional, aplicamos os conceitos da Cinemática Escalar. A partir do momento em que analisamos os movimentos nos espaços bidimensionais e tridimensionais, é preciso entender que os movimentos podem ocorrer em várias direções, assim, é preciso correlacionar isso com as grandezas vetoriais para descrever o movimento. Adotemos o ponto material, a sua velocidade e a aceleração como esse tipo de grandeza.

Para indicar a direção, adotamos segmentos orientados para descrever um vetor posição com origem em um ponto de referência adotado, com extremidade na posição ocupada pelo ponto material e com intensidade correspondente à distância que o separa da origem. Vejamos um exemplo:

Em um treino de Fórmula 1, um carro de corrida se movimenta na pista.

Figura 24 - Imagem de um carro de Fórmula 1 em uma pista de treino

Descrição da Imagem: imagem de um carro de Fórmula 1 em movimento durante uma curva na pista de corrida.

No início do treino, após sair do box, ele está 600 m na direção norte; depois de 20 s correndo na pista, ele se encontra 800 m a oeste, de modo que o seu deslocamento pode ser representado pela seguinte trajetória:

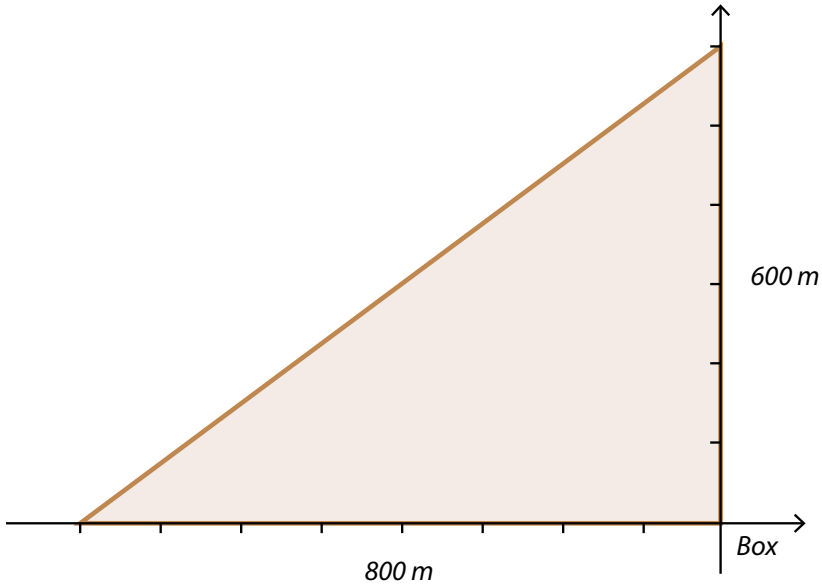


Figura 25 - Deslocamento vetorial do carro / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um triângulo retângulo que representa o deslocamento vetorial do carro entre os instantes indicados no enunciado.

Podemos associar a trajetória do deslocamento a vetores que representarão as posições do carro nos dois instantes, conforme indicado na figura anterior do triângulo retângulo, cujos catetos são o vetor deslocamento ao norte e o vetor deslocamento a oeste. A hipotenusa representa o vetor que une esses dois vetores com origem no primeiro vetor e extremidade no segundo vetor, cujo vetor deslocamento é indicado por $\Delta \vec{r}$. Podemos determinar o módulo desse vetor por meio de:

$$\Delta \vec{r} = \sqrt{(600)^2 + (800)^2}$$

$$\Delta \vec{r} = 1000$$

Ou seja, a distância é de 1000 metros ou 1 km. Outra relação que pode ser estabelecida é o módulo da velocidade vetorial média, expresso por:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}_m| = \frac{1000}{20}$$

$$|\vec{v}_m| = 50\ m/s$$

Assim, a velocidade vetorial média foi de 50 m/s.

A Cinemática Vetorial expande os conceitos vistos a respeito de movimentos. O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), em parceria com a OBMEP, realizou a gravação de videoaulas abordando essa temática. Acesse o QR Code e aprofunde os seus conhecimentos sobre o assunto.

Outra aplicação de vetores na Física é quando utilizamos as Leis de Newton para analisar a força empregada em sistemas de blocos, em que se analisa como as forças agem individualmente e no conjunto. Vejamos um exemplo:

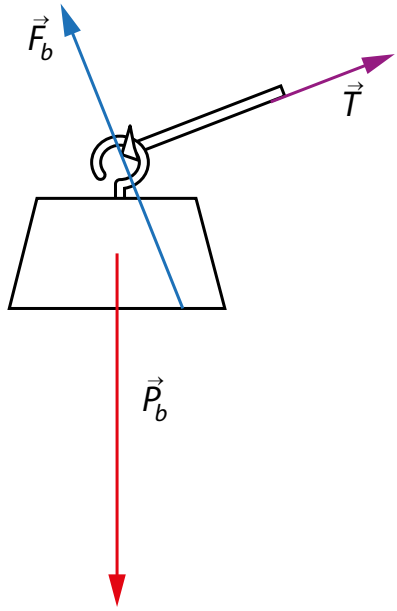


Figura 26 - Ilustração de aplicação de forças vetoriais em um sistema de bloco / Fonte: adaptada de Wikimedia ([2021], on-line).

Descrição da Imagem: ilustração de um bloco com um gancho na parte superior e com indicação de três forças agindo em direções diferentes.

No bloco, temos, por exemplo, a força peso, a força normal, que seria a interação com o apoio, e a força aplicada por um agente externo. Uma aplicação disso se dá nos elevadores, que podem ser tratados como um bloco, e, a partir da sua massa total, pode-se realizar a análise do movimento vertical e das forças que atuam sobre ele. Observe a caixa de um elevador indicada a seguir:

Figura 27 - Imagem de uma caixa de elevador

Descrição da Imagem: imagem da parte interna de uma caixa de elevador mostrando os cabos de apoio que possibilitam ao elevador percorrer a sua trajetória.

Na caixa de elevador, quando ocorre o movimento vertical do bloco do elevador, há ação da força de tração no cabo e a força peso. Quanto ao sentido do movimento, se ocorrer no sentido da velocidade, podemos indicar que pode subir ou descer, já em relação à intensidade da velocidade, o movimento pode ser:

- Uniforme quando o módulo da velocidade é constante.
- Acelerado quando o módulo da velocidade aumenta.
- Retardado quando o módulo da velocidade diminui.

Outra aplicação da Física é a análise do centro de massa de um corpo, em que podemos considerar

REALIDADE AUMENTADA

Movimento vertical do bloco do elevador

toda a massa de um sistema de corpos concentrada em um único ponto. Para isso, é preciso definir um vetor posição do centro de massa de um sistema de n pontos materiais. Para tanto, é preciso aplicar conceitos de:

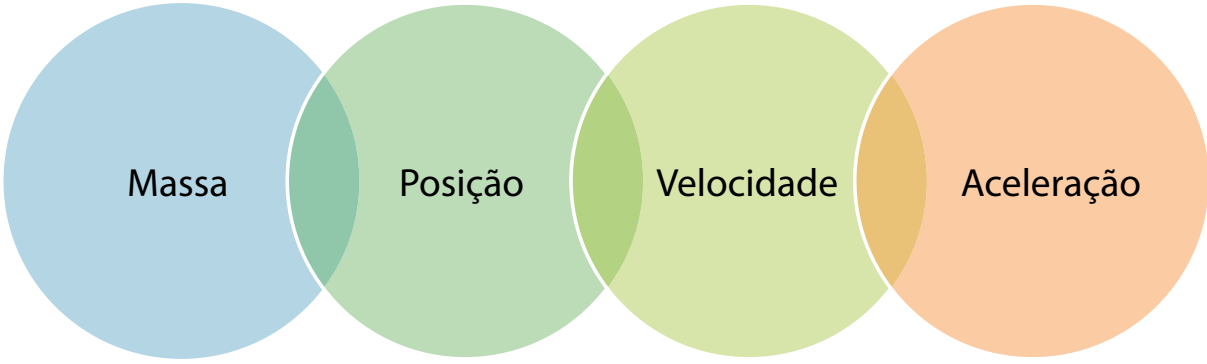


Figura 28 - Infográfico sobre o centro de massa e os elementos envolvidos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico representado por círculos que contêm os elementos que devem ser considerados para análise do centro de massa, sendo: massa, posição, velocidade e aceleração.

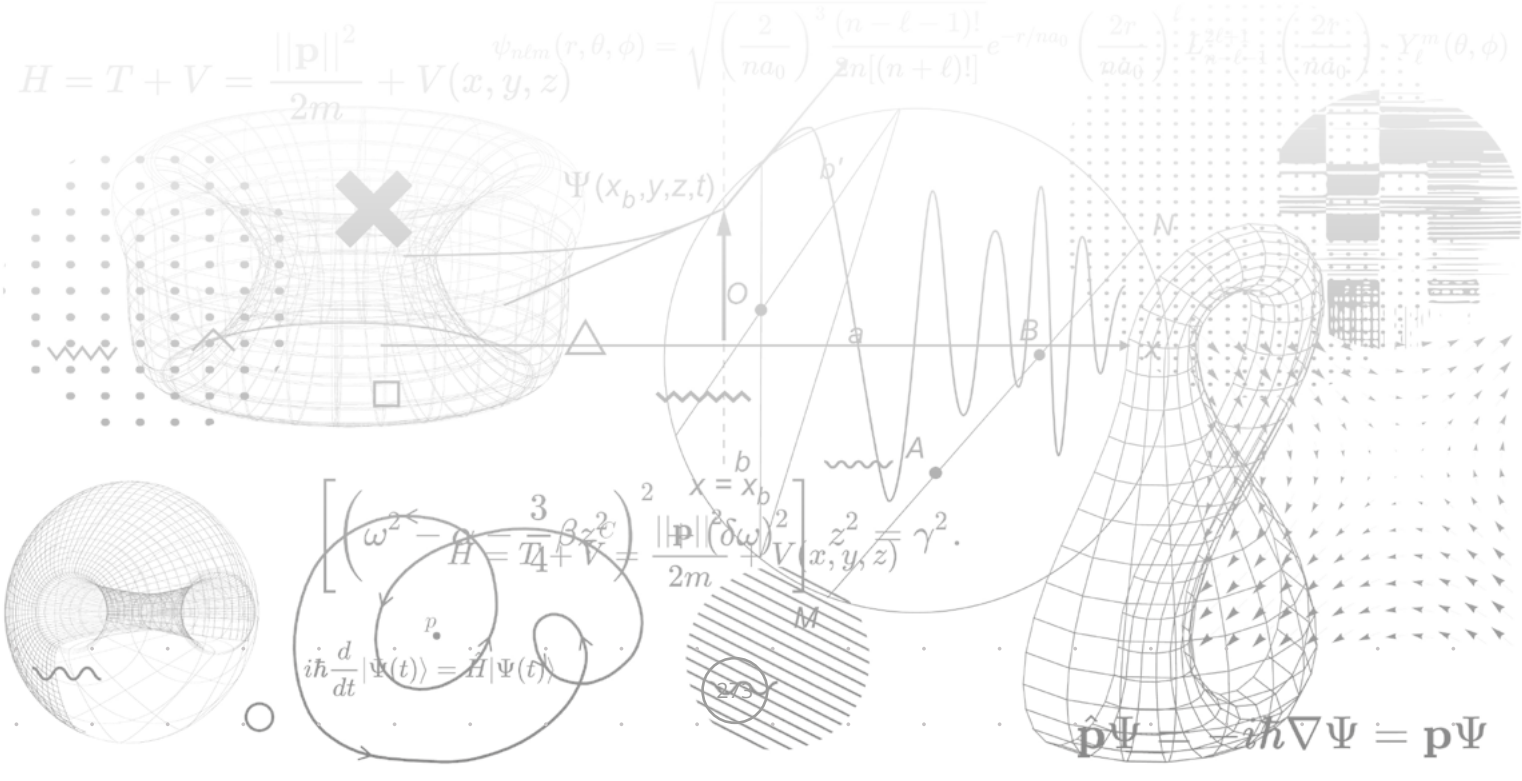
O centro de massa pode ser analisado em diferentes tipos de superfícies e volumes, mas como podemos calculá-lo? Para saber como obter o centro de massa, acesse o QR Code e aprofunde os seus conhecimentos.

Na determinação do centro de massa de corpos em formato irregular, são necessários os conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral. Por meio de fórmulas específicas aplicadas à função densidade do corpo, podemos determinar o centro de massa de uma superfície se for dada em duas variáveis; se for dada em três variáveis, calculamos o centro de massa de um volume.

Participe da discussão sobre aplicações dos conceitos relacionados ao centro de massa e às noções de equilíbrio. Aperte o play, e vamos juntos!

Quando se analisa o equilíbrio de um ponto material, é necessário e suficiente que a resultante de todas as forças atuantes sejam nulas. Para essa análise, pode ser aplicado, por exemplo, o método dos componentes vetoriais para verificar as ações de forças em um ponto material.

Os conteúdos abordados nesta unidade estão relacionados com as aplicações da Física, mas, também, dependem de conceitos relacionados à Álgebra Linear e ao Cálculo Diferencial e Integral. Para complementar seus estudos, recomendamos as seguintes obras: ***Cálculo aplicado: curso rápido***, de Larson (2011); ***Cálculo***, de Thomas, Weir e Hass (2002); ***Fundamentos da Física***, de Halliday e Resnick (1994); e ***Princípios da Física***, de Serway e Jewett (1994).



Quando se executam projetos de grandes dimensões, diversas áreas são aplicadas na elaboração do projeto, dentre elas, a Física. Um dos exemplos é o projeto estrutural, o qual é complementar ao projeto arquitetônico, mas de vital importância, pois são os cálculos estruturais que garantem a estabilidade da edificação. Esses cálculos são baseados nos princípios da Física, tendo suporte de subáreas da Matemática, como a Álgebra Linear e o Cálculo Diferencial e Integral. Em geral, demanda cálculos de alta complexidade, assistidos por calculadoras e computadores, em que o(a) engenheiro(a) responsável valida os resultados e elabora o projeto complementar com os detalhamentos e peças gráficas.

Nesta unidade, abordamos os movimentos escalares para nos familiarizarmos com a linguagem aplicada na área da Física e os conceitos basilares para que outros mais complexos sejam definidos. Vimos, a título de exemplo, o movimento uniforme e o movimento variado uniformemente, ambos aplicados no espaço unidimensional.

Construa um mapa mental a partir das palavras-chave: Cinemática, Aplicações, Movimento uniforme e Movimento variado uniformemente. Utilize o exemplo e complemente com suas anotações de cada tópico abordado nesta unidade, bem como as informações relevantes.

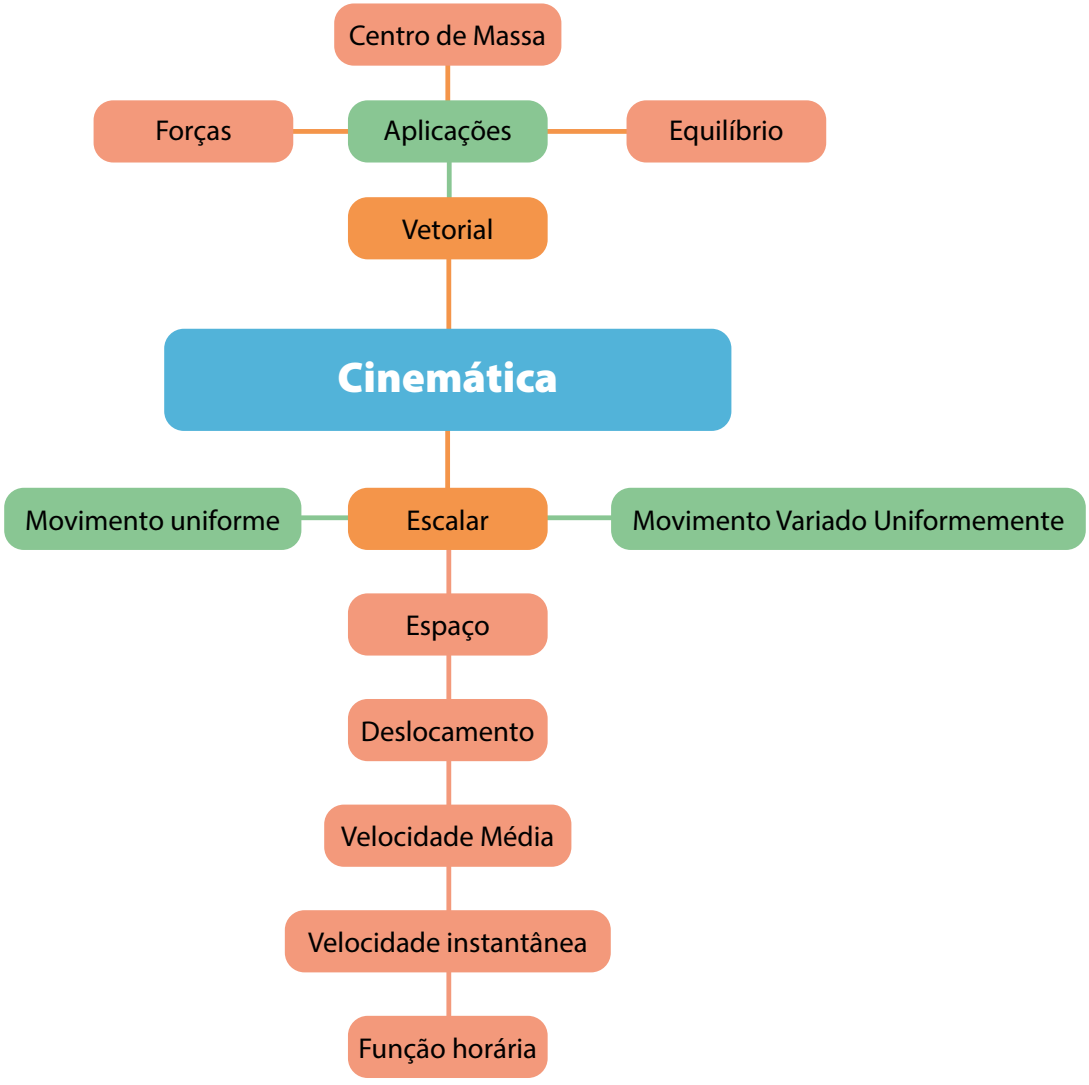


Figura 29 - Mapa mental sobre Cinemática / Fonte: a autora.

MAPA MENTAL

1. Considere que dois veículos saem, em sentidos contrários, simultaneamente, das cidades A e B, que são distantes em 280 km. Sabe-se que o veículo que saiu da cidade A fará o trajeto em velocidade constante de 80 km/h, enquanto o veículo que saiu da cidade B fará o trajeto em velocidade constante de 60 km/h. Depois de quanto tempo esses veículos se encontrarão e qual será a distância da cidade B?

   a) 1 h e 120 km.

   b) 2h e 120 km.

   c) 1h e 160 km.

   d) 2h e 160 km.

   e) 2h e 180 km.

2. Podemos estudar o movimento de um corpo qualquer. Com base nisso, analise as afirmações a respeito do movimento uniforme.

   I) Quando ocorre o movimento do tipo progressivo, temos que ele é a favor do sentido positivo da trajetória.

   II) O gráfico da função horária da posição para o movimento uniforme é dado por uma reta crescente.

   III) Quando o movimento de um corpo ocorre de modo retrógrado, ao representarmos a posição em função do tempo em um gráfico, temos uma reta crescente.

   Assinale a alternativa correta que corresponde ao julgamento das afirmações.

   a) Apenas I é correta.

   b) Apenas III é correta.

   c) Apenas II e III são corretas.

   d) Apenas I e II são corretas.

   e) Apenas I e III são corretas.

3. Analise o texto a seguir.

O _____ é determinado por meio das coordenadas localizadas em uma placa homogênea de espessura constante, cujas dimensões são conhecidas, indicando, assim, o ponto de equilíbrio dessa superfície.

Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna.

a) Centro de gravidade.
b) Centro de força.
c) Centro de massa.
d) Sistema cartesiano.
e) Movimento uniforme.

MEU ESPAÇO

Noções de Estática

Dra. Debora Cristiane Barbosa Kirnev

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM

Nesta unidade, damos continuidade aos estudos relacionados ao equilíbrio, mas direcionado aos corpos que permanecem em equilíbrio estático. No decorrer da unidade, damos um tratamento vetorial a conceitos já abordados anteriormente, como, por exemplo, velocidade e aceleração, que, nesse caso, ocorrem em espaços bidimensionais e tridimensionais. Retomamos o conceito de força como uma grandeza vetorial, realizamos as interpretações de situações em que ela é aplicada e utilizamos esses conceitos nas análises de forças atuantes para que haja equilíbrio de um corpo. Bons estudos!

Na construção civil, há uma aplicação da Física que estuda, especificamente, a estabilidade das estruturas. Nesse tipo de estudo, é preciso conhecer as condições de equilíbrio do corpo rígido, ou seja, o equilíbrio das forças que agem sobre o corpo e o equilíbrio das tendências ao movimento rotacional, isto é, os torques que essas forças podem produzir. Observe a ponte Juscelino Kubitschek, em que foram empregados cálculos estruturais para que sua estrutura se mantivesse em equilíbrio.

Figura 1 - Fotografia da ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília

Descrição da Imagem: foto de uma ponte sobre um longo rio, em que temos três anéis parciais que passam sobre a ponte, produzindo uma arquitetura diferenciada.

Na imagem, a ponte Juscelino Kubitschek, ou, como também é conhecida, a Terceira Ponte, do arquiteto Alexandre Chan, situada em Brasília, no Lago Sul, inaugurada em dezembro de 2002, possui 1,2 km de extensão, possui uma estrutura diferenciada, com formato de arcos sobre a pista.

Vejamos o caso do Sheraton Huzhou Hot Spring Resort, localizado na cidade de Huzhou, na China, que foi construído na forma de arco.

Figura 2 - Fotografia do hotel Sheraton Huzhou Hot Spring Resort

Descrição da Imagem: foto de um prédio em forma de arco, em que temos uma estrutura dupla de apoio no solo.

Mesmo não possuindo uma estrutura convencional para a edificação, ocorre o equilíbrio entre as forças atuantes. Outro exemplo inusitado é o Puerto de Europa, indicado a seguir:

Figura 3 - Fotografia dos edifícios Puerto de Europa

Descrição da Imagem: foto de dois prédios, com inclinação em relação ao eixo central, formados por paralelepípedos oblíquos.

Observe que as torres foram construídas de forma oblíqua, desafiando as forças da gravidade atuante sobre a edificação. Por possuírem uma arquitetura diferenciada, as construções apresentadas possuem diversas tensões existentes sobre elas. Como essas edificações se mantêm em equilíbrio?

Quando analisamos um objeto em repouso, temos um caso de equilíbrio estático. E quando analisamos um corpo em velocidade constante, também, temos equilíbrio, mas, nesse caso, ocorre o equilíbrio dinâmico. Dessa forma, para termos uma noção a respeito da Estática, temos que compreender os tipos de equilíbrios. Quando um corpo não apresenta movimentos de rotação e translação, temos uma situação de equilíbrio estático, que será objeto de estudo dessa unidade. Vejamos, na sequência, uma estrutura metálica curva, recoberta por pele de vidro, a qual mantém o equilíbrio das tensões existentes.

Figura 4 - Fotografia de estrutura metálica curva recoberta com pele de vidro

Descrição da Imagem: fotografia de uma estrutura metálica em espiral, formando uma cúpula recoberta por pele de vidro.

Na imagem, podemos ver que, devido à distribuição das forças atuantes, a estrutura se mantém estável e em equilíbrio estático.

Temos diversos tipos de estruturas metálicas com formas diferenciadas, entretanto, um fato em comum é que a distribuição de forças atuantes precisa se manter nula para que haja o equilíbrio estático. Vejamos alguns tipos de estruturas metálicas.

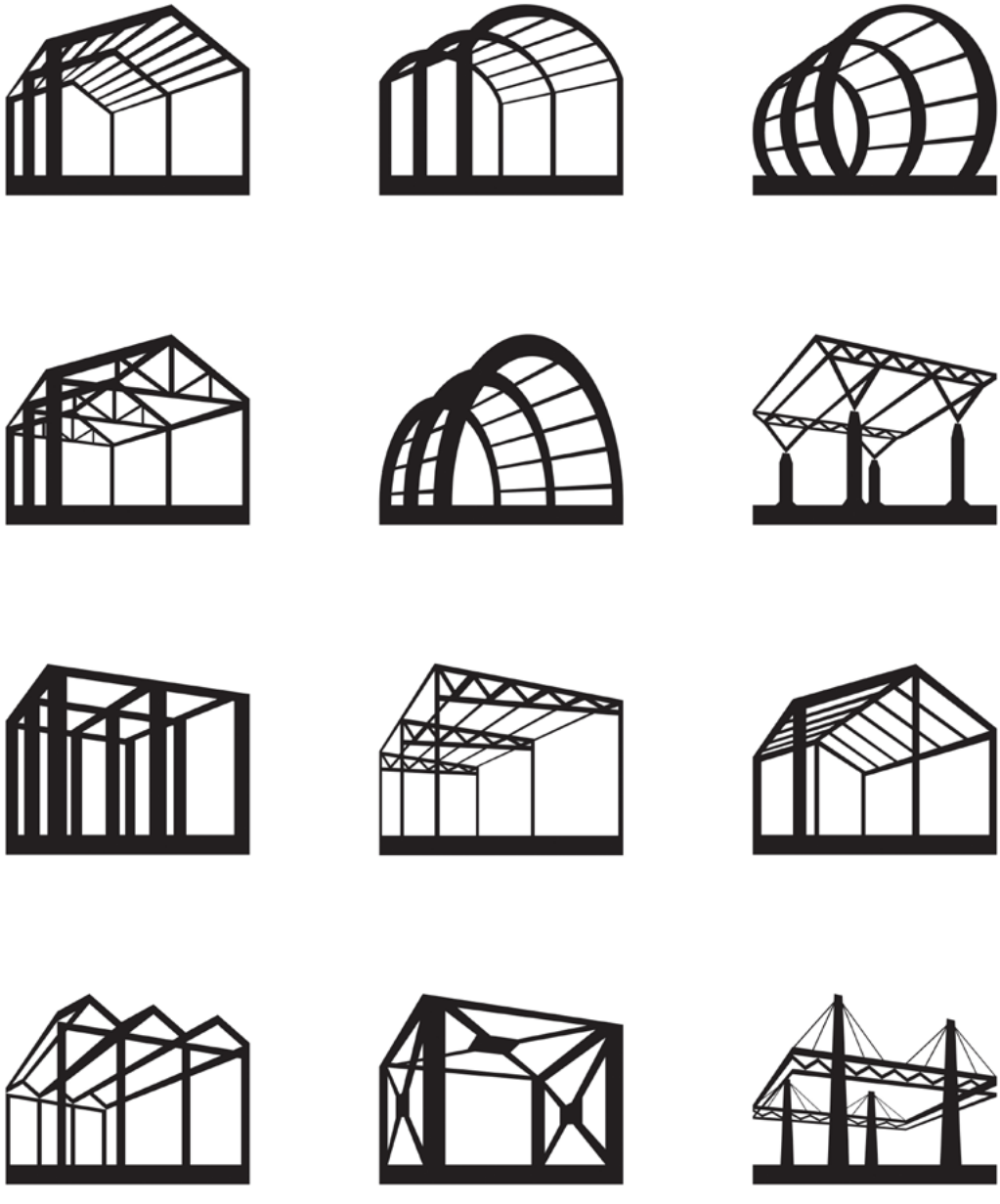


Figura 5 - Modelos de estruturas metálicas

Descrição da Imagem: ilustração de diversos modelos de estruturas metálicas em formas de arcos, vigas e pilares.

Em cada um dos exemplos, foram determinados pontos de encontro entre as vigas metálicas, de modo que, seja na forma de arco e pilares, ou na forma de vigas e pilares, as cargas atuantes são levadas até o solo, sem comprometer a estrutura. Outro tipo de estrutura análoga são as pontes. Vejamos a ilustração:

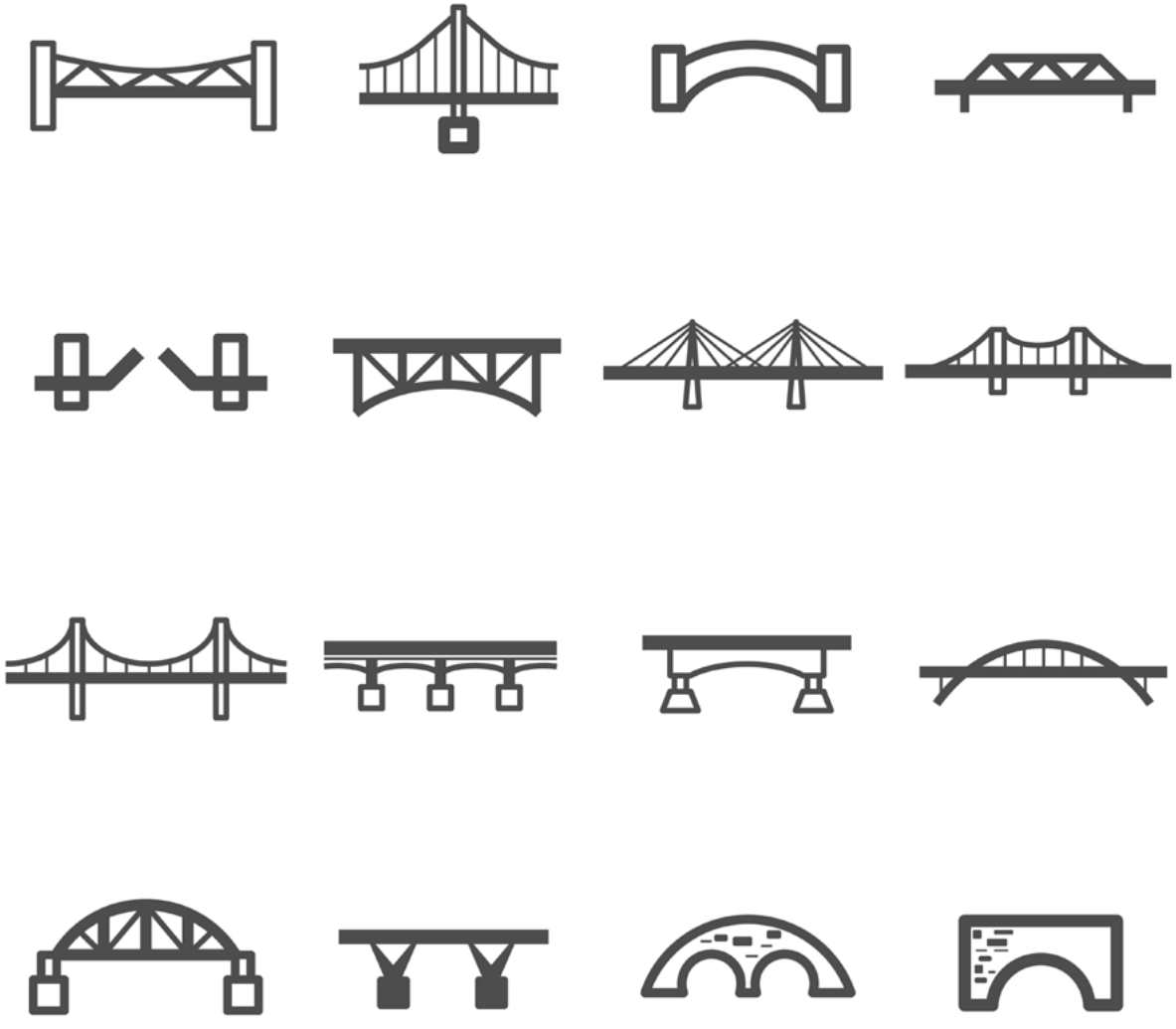


Figura 6 - Modelos de estruturas de pontes

Descrição da Imagem: ilustração de diversos modelos de pontes em formas de arcos, vigas e pilares.

São estruturas que precisam suportar diversas tensões, mantendo o equilíbrio entre as forças atuantes. Nas imagens apresentadas, identifique o(s) ponto(s) por onde as forças atuantes chegam da fundação ao solo e analise como foi a distribuição das forças na estrutura para que isso ocorresse.

Como você pôde observar nos diferentes sistemas estruturais anteriores, quando há equilíbrio na distribuição das forças, elas percorrem todas as extensões até a fundação, até que as forças se estabilizem no solo. Dentre os conceitos relacionados ao equilíbrio, a Estática é um caso particular em que podemos entender sistemas de forças que se equilibram. Com base na segunda Lei de Newton, a aceleração, nesse caso, é considerada nula. Como há a ausência de movimento, a soma vetorial das forças, também, será nula. Assim, a Estática possibilita compreender as condições de grandes corpos e seus pontos materiais. Devido à extensão do corpo, suas dimensões interferem nos estudos das forças atuantes.

DIÁRIO DE BORDO

Estudaremos a parte da Física que considera o movimento em duas ou três dimensões. Para esse tipo de análise, precisamos especificar um vetor posição indicado por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Em que $x\hat{i}$, $y\hat{j}$, $z\hat{k}$ são as componentes vetoriais de $\vec{r}$ indicadas na base canônica, e x, y, z são as componentes escalares, que fornecem a localização de uma partícula disposta nos eixos coordenados em relação à origem. Quando considerados no espaço bidimensional, temos que $z = 0$. É preciso considerar a decomposição de vetores para solucionar alguns tipos de problemas, de modo que:

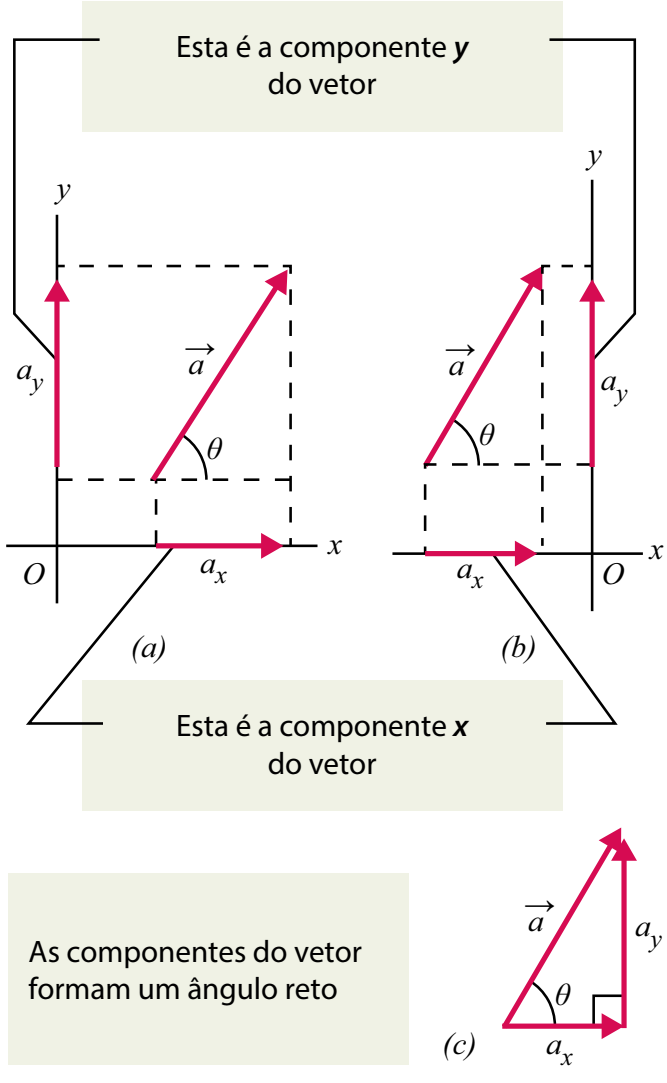


Figura 7 - Ilustração da decomposição de um vetor $\vec{a}$ no plano bidimensional / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 121).

Descrição da Imagem: representação da decomposição de um vetor, considerando a componente horizontal e a componente vertical que formam um ângulo reto entre si.

Vejamos a ilustração de um vetor posição dado por $\vec{r} = (-3m)\hat{i} + (2m)\hat{j} + (5m)\hat{k}$ com sua respectiva representação no espaço tridimensional.

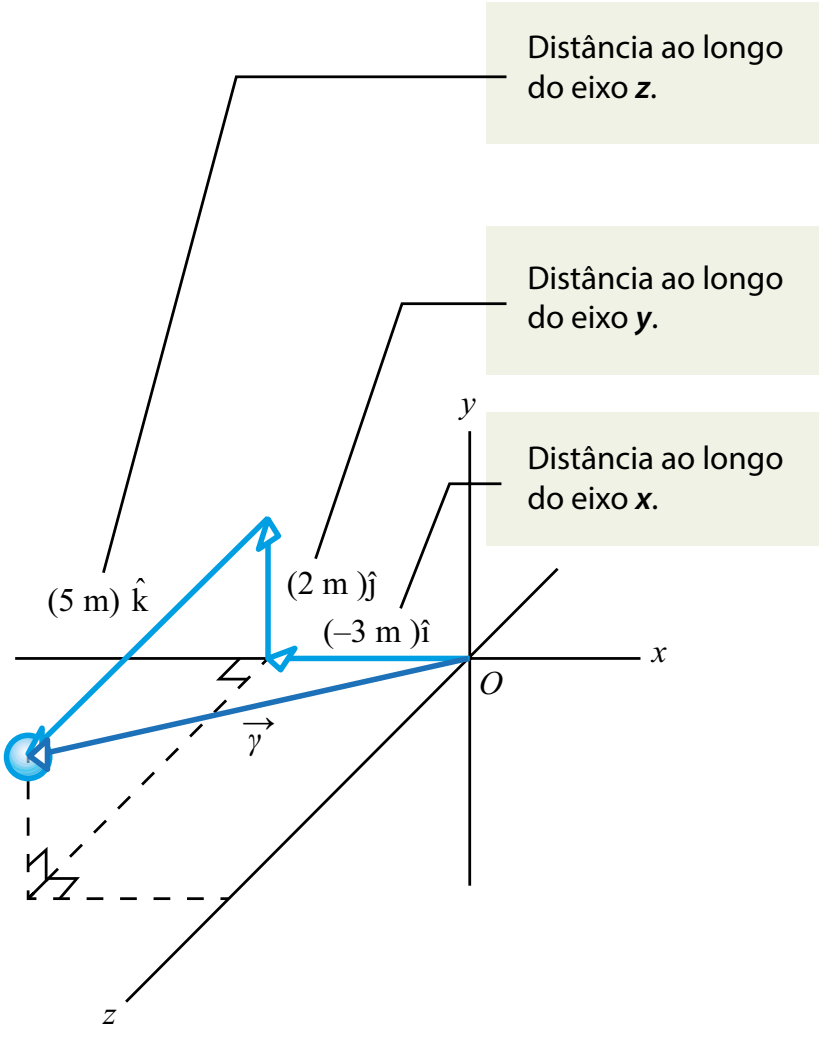


Figura 8 - Ilustração de um vetor posição $\vec{r}$ de uma partícula / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 163).

Descrição da Imagem: indicação, a partir da origem, do deslocamento de uma partícula nas direções x, y, z, em que o vetor posição é a soma vetorial de suas componentes vetoriais dadas por $(-3m,\ 2m,\ 5m)$.

Nessa representação, as coordenadas retangulares são indicadas por $(-3m,\ 2m,\ 5m)$. Considerando a direção do eixo x, a partícula se localiza a 3 m da origem, no sentido contrário ao do vetor unitário $\hat{i}$; enquanto, na direção do eixo y, ela se localiza a 2 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{j}$; e, no eixo z, ela está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário $\hat{k}$.

Ao adotarmos que uma partícula se movimenta, é preciso que seu vetor posição sofra variação a partir do ponto de referência (origem) à partícula. Podemos expressar essa variação da seguinte forma:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Em que:

$\vec{r}_1$: posição inicial.

$\vec{r}_2$: posição final.

Ao considerar que uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estabelecer com que rapidez a partícula se move por meio de um movimento que denominamos velocidade média e velocidade instantânea, mas aplicadas ao movimento bidimensional ou tridimensional, em que é preciso aplicar as grandezas vetoriais.

Considere que uma partícula tenha realizado um deslocamento $\Delta \vec{r}$ em um intervalo de tempo de Δt. A velocidade média $\vec{V}_{med}$ é dada por:

$$\text{Velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}}$$

$$\vec{V}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Utilizando a representação em forma de componentes vetoriais, temos:

$$\vec{V}_{med} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \hat{i}}{\Delta t} + \frac{\Delta y \hat{j}}{\Delta t} + \frac{\Delta z \hat{k}}{\Delta t}$$

Vejamos a ilustração dessa forma de deslocamento em duas dimensões.

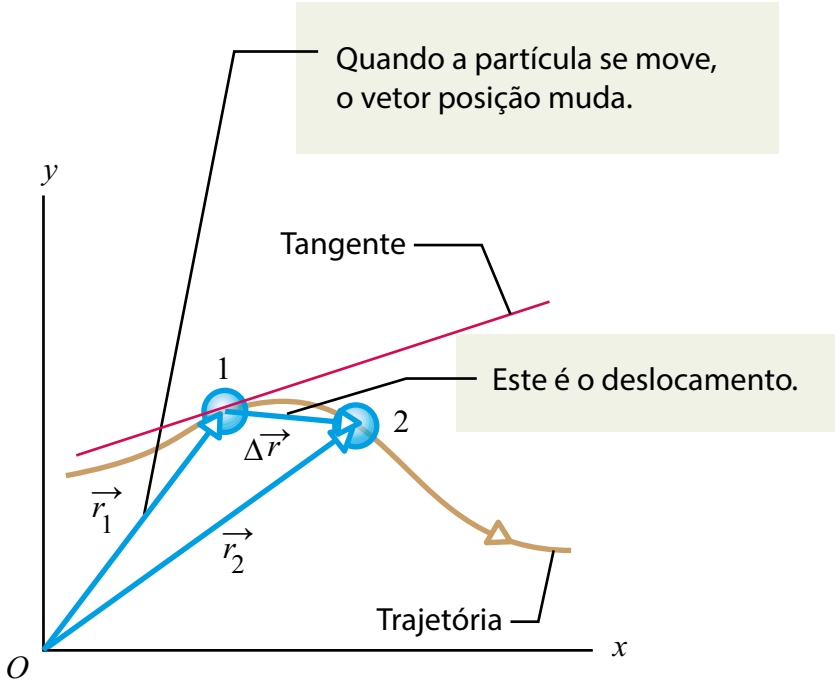


Figura 9 - Ilustração de um deslocamento $\Delta\vec{r}$ de uma partícula / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 168).

Descrição da Imagem: indicação, a partir da origem, do deslocamento de uma partícula nas direções x e y, em que se mostra o deslocamento de um vetor a partir de uma trajetória pré-definida.

Vejamos um exemplo de velocidade média vetorial.

Considere que uma partícula teve um deslocamento de $(18m)\hat{i}+(6m)\hat{j}$ em 3,0 segundos, assim, a velocidade média durante o movimento é dada por:

$$\vec{V}_{med}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{(18m)\hat{i}+(6m)\hat{j}}{3,0s}=(6,0m/s)\hat{i}+(2,0m/s)\hat{j}$$

No caso da velocidade instantânea, em que $\vec{v}$ é dada quando considerada em determinado instante, temos o valor para quando a velocidade média tende a zero. Seria o conceito de um limite, em que temos uma derivada indicada por:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Na velocidade instantânea de uma partícula, no instante no qual a partícula está na posição inicial, reduzimos o intervalo de tempo tendendo a zero. Dessa forma, temos:

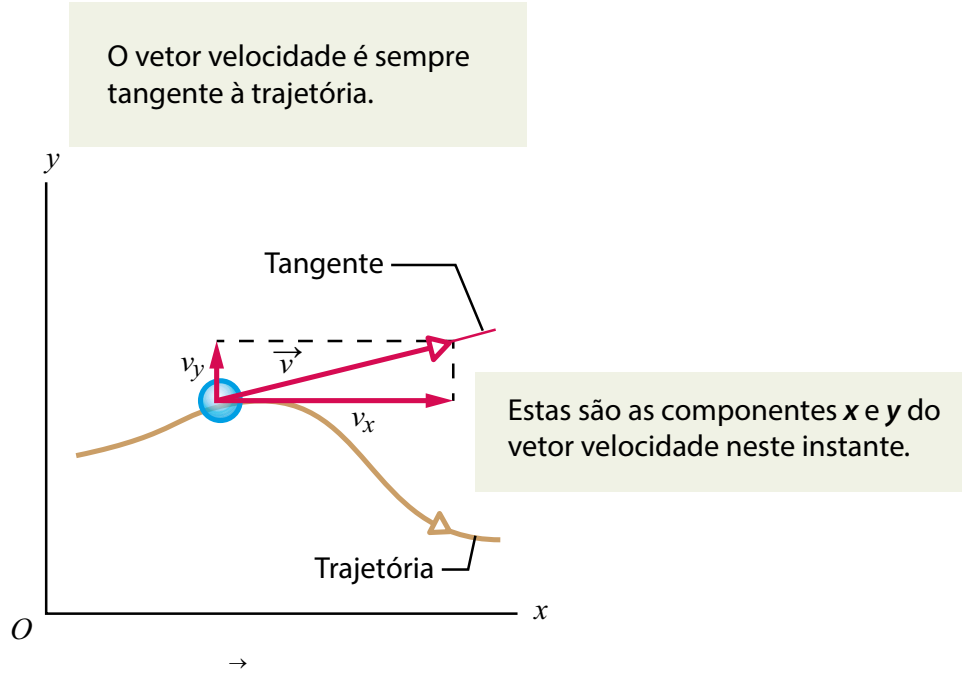


Figura 10 - Ilustração da velocidade $\vec{v}$ de uma partícula / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 169).

Descrição da Imagem: indicação do vetor velocidade $\vec{v}$ de uma partícula e as respectivas componentes escalares.

Podemos aplicar as grandezas vetoriais na aceleração, pois ela possui módulo, uma orientação e pode ser representada por meio de componentes, de modo que:

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}}$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aplicando o limite quando o tempo tende a zero, temos a aceleração instantânea sendo expressa pelo cálculo da derivada, indicada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Vejamos um exemplo de vetores aplicados à aceleração.

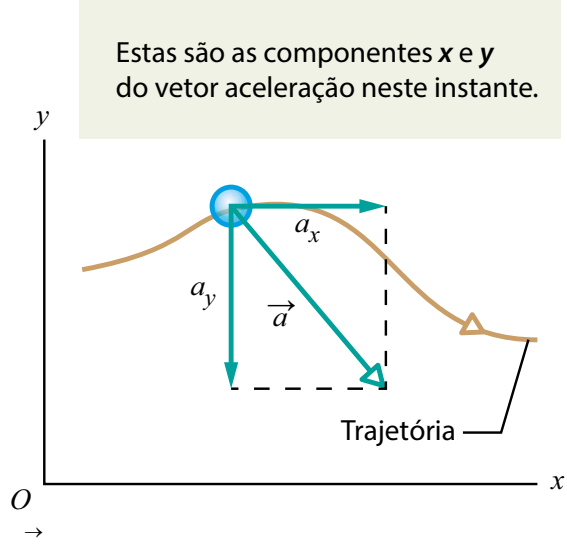


Figura 11 - Ilustração da aceleração $\vec{a}$ de uma partícula / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 174).

Descrição da Imagem: indicação do vetor aceleração $\vec{a}$ de uma partícula e as respectivas componentes escalares.

Temos diversos tipos de movimentos nos quais podem ser aplicadas as grandezas vetoriais. Vejamos alguns casos.

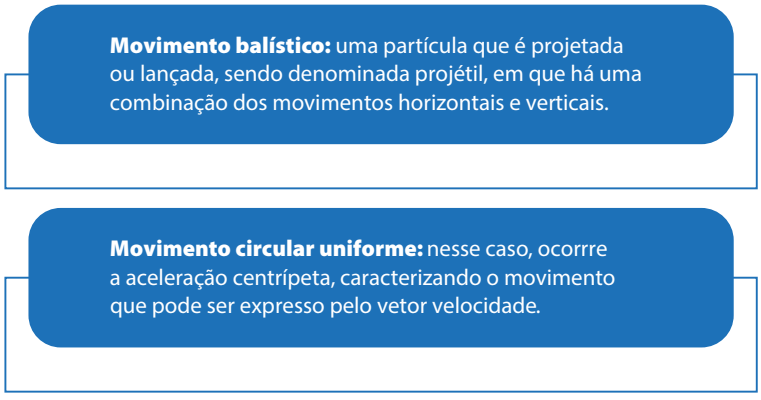


Figura 12 - Infográfico sobre os tipos de movimentos / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico sobre o movimento balístico — uma partícula que é projetada ou lançada, sendo denominada projétil, em que há uma combinação dos movimentos horizontais e verticais — e o movimento circular uniforme — nesse caso, ocorrre a aceleração centrípeta, caracterizando o movimento que pode ser expresso pelo vetor velocidade.

Vejamos um exemplo de movimento circular uniforme.

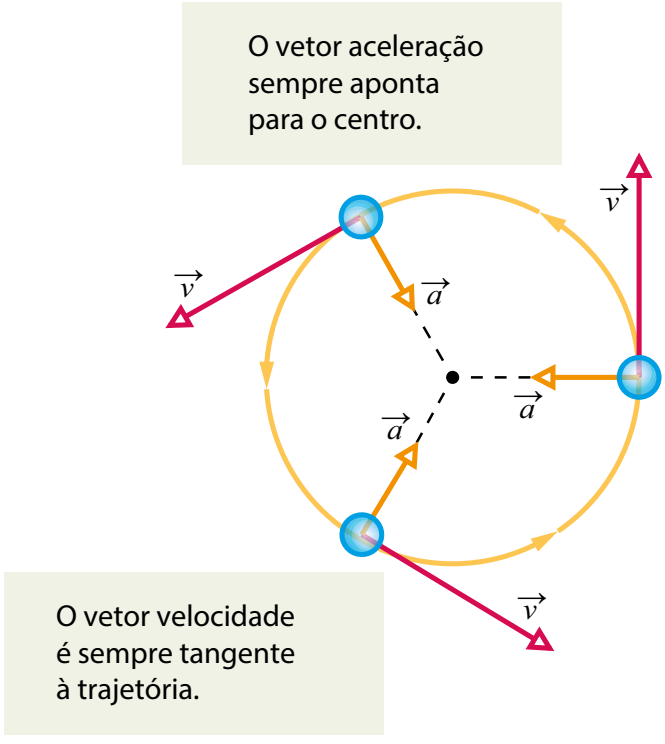


Figura 13 - Ilustração da aceleração $\vec{a}$ de uma partícula em busca do centro / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 191).

Descrição da Imagem: indicação do vetor aceleração $\vec{a}$ de uma partícula em movimento circular uniforme.

Além do conceito relacionado à aplicação de grandezas vetoriais em 2 e 3 dimensões, abordaremos o equilíbrio e o ponto material, considerado como um corpo pequeno o suficiente para que as suas dimensões não interfiram em um estudo, mantendo as forças atuantes sobre ele nulas. Por exemplo:

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = 0$$

De modo genérico, temos que:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Outros conceitos são fundamentais para a Estática. Para podermos esclarecer por que duas forças atuantes sobre uma mesma partícula podem ser substituídas por uma força resultante, vejamos a ilustração a seguir, em que $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$:

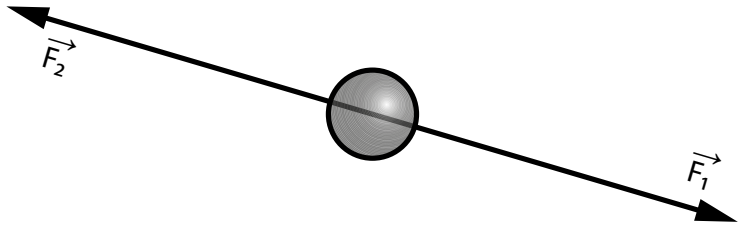


Figura 14 - Equilíbrio de partícula sob a ação de duas forças / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de uma partícula com dois vetores direcionais em sentidos opostos, na diagonal, mantendo a partícula em equilíbrio.

Outro conceito necessário é o que denominamos momento de força, que se trata da capacidade de se provocar um giro ou, apenas, uma tendência de giro aplicada a um corpo ao redor de um eixo que a força exerce, nesse caso, temos uma grandeza vetorial, que é proporcional à força e à distância aplicada a um ponto de rotação. De acordo com a segunda Lei de Newton, temos:

A força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração, ou seja, $F = m \cdot \vec{a}$

Vejamos uma ilustração.

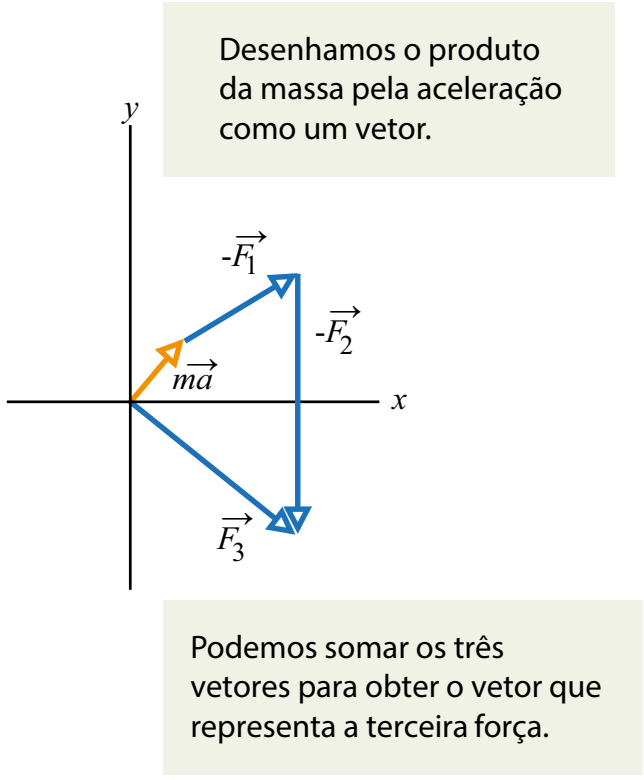


Figura 15 - Ilustração da força resultante $\vec{ma}$ aplicada com outras forças / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 250).

Descrição da Imagem: indicação do vetor da força resultante $\vec{ma}$ indicada no plano cartesiano, formando um polígono a partir da origem com outras três forças.

A força é positiva quando girada no sentido horário e negativa quando girada no sentido anti-horário, sendo medida em Newton-metro, isto é, N.m.

Em Física, são aplicadas diversas unidades de medidas. No caso específico da força, a medida é dada em Newton-metro, mas como é obtida essa unidade de medida? Investigue mais sobre esse assunto e aprofunde seu conhecimento.

Ao considerar duas ou mais forças agindo em uma mesma partícula, podemos somar, vetorialmente, as forças para obter a força resultante. Dessa forma, temos um princípio conhecido como superposição de forças, em que é possível analisar as forças empregadas nas mais diversas situações do dia a dia. Vejamos uma ilustração de uma aplicação de força, na qual temos as possíveis posições de uma força resultante entre dois vetores.

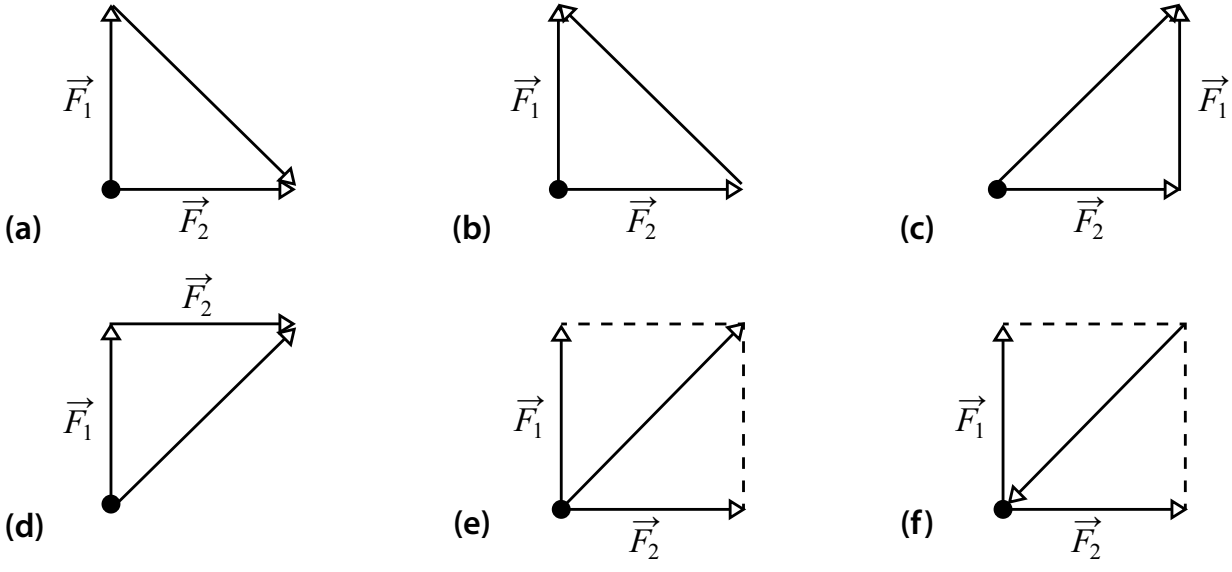


Figura 16 - Ilustração de possíveis posições de um vetor resultante da atuação de duas forças
Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 243).

Descrição da Imagem: indicação de seis representações de vetores que exprimem as aplicações de força, em que os quatro primeiros casos são variações no formato triangular, e os dois últimos casos, variações na diagonal de um retângulo.

No exemplo apresentado, a soma vetorial de forças ocorre nos itens (a), (b), (c) e (d), em que temos uma força resultante, já nos itens (e) e (f), temos contraexemplos de soma vetorial de forças. Temos que, se a força resultante atua sobre um corpo sendo zero, o corpo permanece em repouso se estiver, inicialmente, em repouso ou, ainda, se move em linha reta, com velocidade constante, se estiver, inicialmente, em movimento.

Entendemos que as forças que agem sobre um corpo se compensam, mantendo-o em equilíbrio. Não significa que as forças não existem mais, elas continuam atuando no corpo, mas sem acelerá-lo. As forças podem ser externas ou internas e compor um sistema formado por um ou mais corpos. Caso os corpos estejam rigidamente ligados, podemos considerá-los como um único corpo. Temos alguns casos de forças especiais, como:

Força gravitacional: quando é exercida uma força sobre um corpo, em que ocorre a atração de um segundo corpo sobre o primeiro. Como, por exemplo, a força que atrai os corpos para o centro da Terra.

Força normal: é um tipo de força que é exercida de forma perpendicular em relação a uma superfície, como, por exemplo, quando se está em pé sobre um piso.

Figura 17 - Infográfico sobre os tipos de forças / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração de um infográfico sobre a força gravitacional e a força normal.

Vejamos uma ilustração de como essas forças são aplicadas.

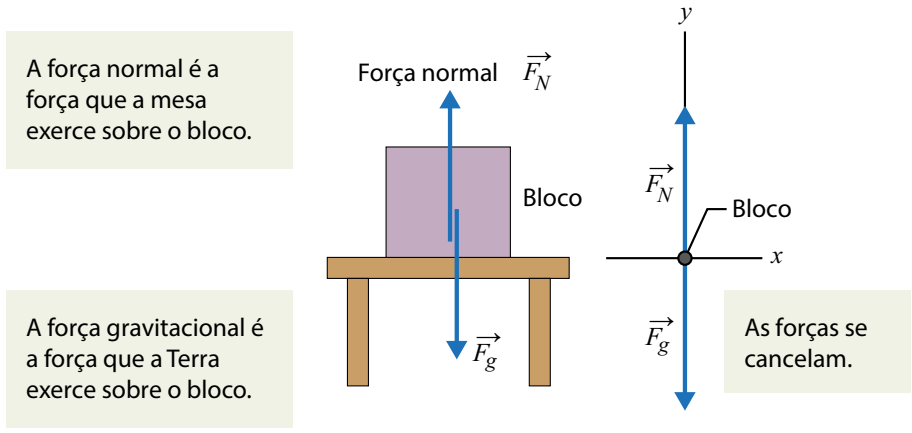


Figura 18 - Ilustração da aplicação das forças gravitacional e força normal sobre um bloco / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 256).

Descrição da Imagem: desenho de um bloco sobre uma mesa, em que a força normal é aplicada para cima, e a força gravitacional é aplicada para baixo, mantendo o equilíbrio do bloco.

Observamos que, ao empurrarmos um corpo sobre uma superfície, o contato dos átomos do corpo com os átomos da superfície provoca resistência ao movimento. Essa resistência é considerada como uma força única, indicada por $\vec{f}$, denominada força de atrito ou, apenas, atrito, sendo uma força paralela à superfície e que aponta para o sentido oposto do movimento. Vejamos uma ilustração.

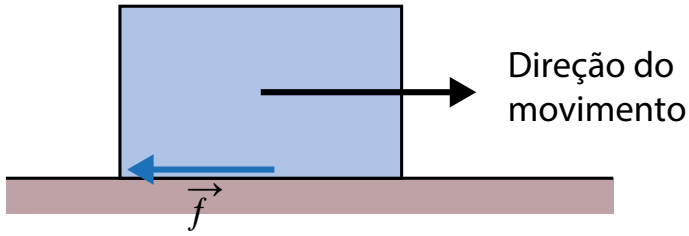
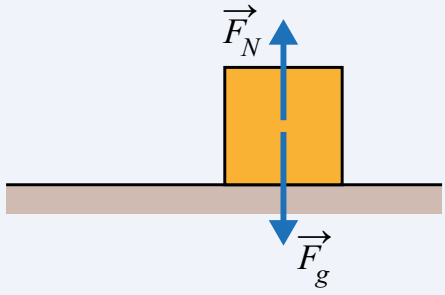
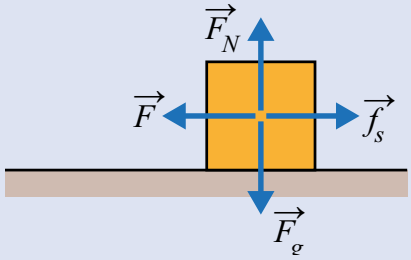
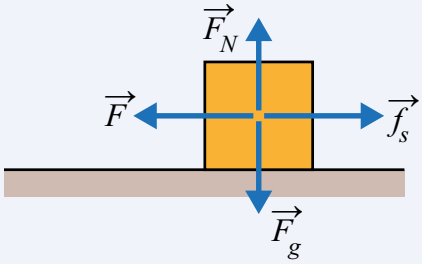
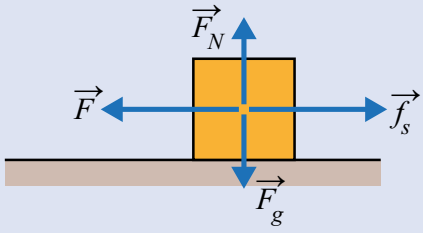


Figura 19 - Ilustração da força de atrito de um bloco com a superfície / Fonte: Halliday e Resnick 1994, p. 256).

Descrição da Imagem: desenho de um bloco sobre uma superfície. Ele é deslocado para uma direção, e a força de atrito é aplicada no sentido contrário.

Esse tipo de força pode interferir no movimento de um corpo. Vejamos algumas situações:

Forças aplicadas	Descrição
	Não é aplicada força horizontal, assim, não ocorre atrito, e não há movimento.
	Ao ser aplicada a força $\vec{F}$, ocorre o equilíbrio da força de atrito f_s, não ocorrendo movimento.
	Foi ampliada a força $\vec{F}$, mas o equilíbrio da força de atrito f_s se manteve, não ocorrendo movimento.



Foi aplicada mais intensidade à força $\vec{F}$, mas o equilíbrio da força de atrito f_s se manteve, não ocorrendo movimento.

Quadro 1 - Análise de forças de atritos / Fonte: adaptado de Halliday e Resnick (1994).

Para verificar aplicações de força e equilíbrio, analise o artigo intitulado "Experimentos de equilíbrio: sistema de forças e polias", no qual se mostra, passo a passo, a realização do experimento, além do cálculo das forças resultantes. Acesse o QR Code e saiba mais sobre esse assunto.

Com base no exposto anteriormente, podemos analisar o equilíbrio aplicado aos corpos rígidos, sendo que:

> Corpos rígidos são um conjunto de partículas que são distantes entre si, mantendo-se dessa forma mesmo com a aplicação de forças entre elas.

Os corpos rígidos podem ser considerados extensos, assim, suas dimensões precisam ser consideradas em uma análise estática, de modo que, se não sofrerem interferência de movimentos de rotação e translação em relação a um referencial, são considerados em equilíbrio. Vejamos uma ilustração de um movimento de rotação.

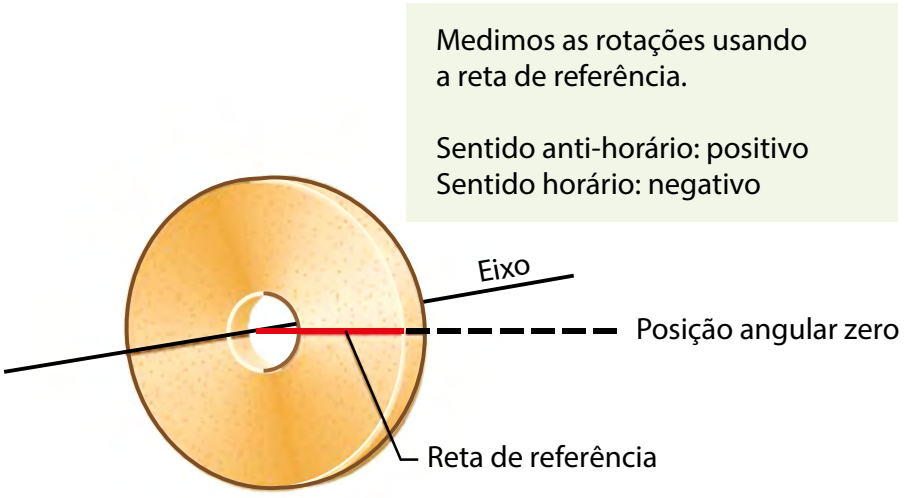


Figura 20 - Ilustração do movimento de rotação / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 243).

Descrição da Imagem: desenho de uma pedra de amolar com um eixo de referência indicando as possíveis rotações no sentido anti-horário, sendo positivo, e no sentido horário, sendo negativo.

Com relação aos corpos rígidos, podemos destacar que:

- Se o somatório das forças aplicadas sobre o centro de massa do corpo for nula, temos que o corpo não se movimenta, estando em equilíbrio estático, ou tenha movimento uniforme, ocorrendo o equilíbrio dinâmico.
- Se o resultante do momento de força aplicado ao corpo for nulo, impedindo o giro, há o equilíbrio estático, ou, ainda, se ocorrer o giro com velocidade angular constante, há o equilíbrio dinâmico.

Entre os tipos de equilíbrios existentes, podemos destacar:

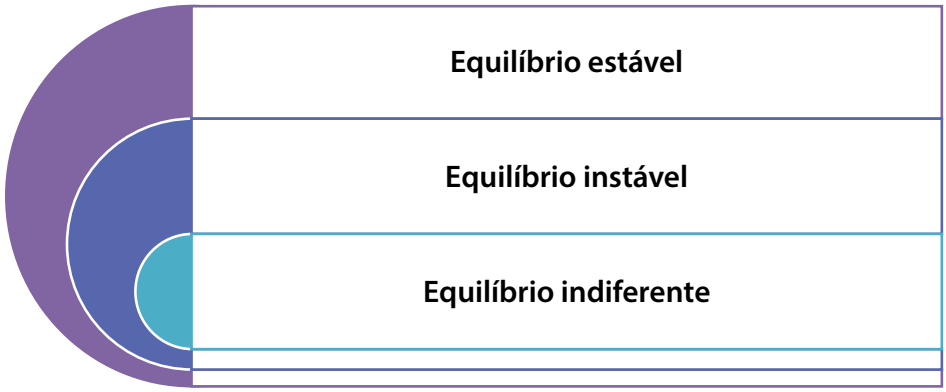


Figura 21 - Infográfico dos tipos de equilíbrio / Fonte: a autora.

Descrição da Imagem: ilustração sobre o equilíbrio estável, equilíbrio instável e equilíbrio indiferente.

Se o equilíbrio for do tipo estável, conforme um corpo realiza um pequeno deslocamento em relação à sua posição de equilíbrio por uma ação externa, acaba retornando à sua posição inicial após essa interferência. Caso o equilíbrio seja instável, se o corpo sair de sua posição de equilíbrio pela ação externa, ele continua a sair da posição após a interferência. Já no equilíbrio indiferente, o corpo, mesmo deslocado, mantém-se em equilíbrio em sua nova posição.

Além de ocorrer o equilíbrio entre as forças, é preciso ocorrer o equilíbrio entre os torques, também entendido como momento de força (M), que seria a tendência de rotação sobre um corpo, dado por:

$$M = F \cdot d$$

Em que:
F : intensidade da força.
d : distância da linha de ação da força ao eixo de rotação, também denominado braço da força.

Com relação ao centro de massa, temos o ponto em que se concentra toda a massa de um corpo, assim a massa total corresponde ao resultado de todas as massas das partículas que compõem um corpo, em que corpos simétricos possuem distribuição uniforme de massa, sendo o próprio centro geométrico. Por meio do centro de massa, podemos determinar, de modo mais fácil, um movimento de um sistema. Veja um exemplo do centro de massa de três partículas que formam um triângulo equilátero.

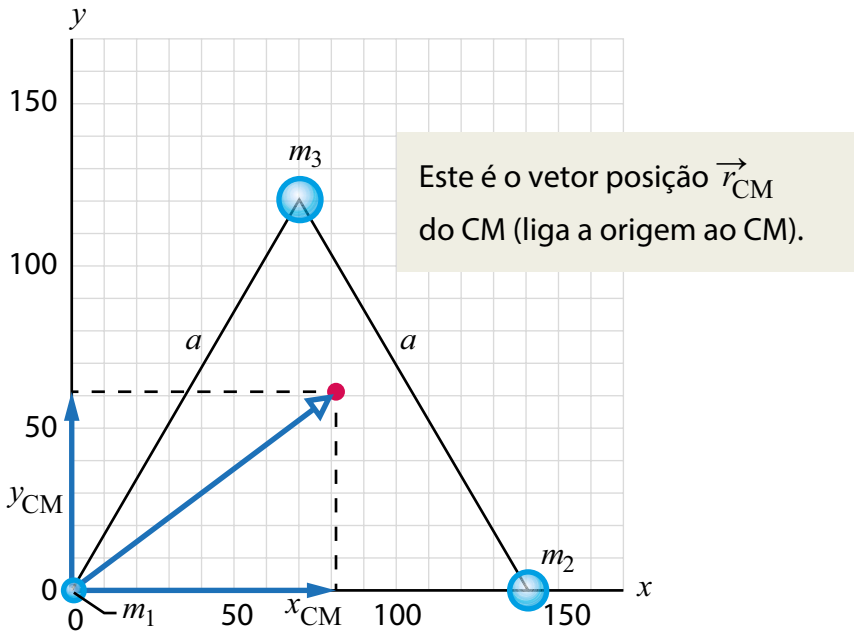


Figura 22 - Ilustração do centro de massa em um triângulo equilátero formado por três partículas
Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 511).

Descrição da Imagem: representação vetorial de um triângulo equilátero de 150 unidades de lado, representado a partir da origem e com base apoiada no eixo horizontal.

Geometricamente, podemos determinar o centro de massa por meio do baricentro. Ao aplicar as grandezas vetoriais, é preciso considerar as coordenadas de cada eixo do plano cartesiano, além de considerar a massa da partícula. De acordo com Halliday e Resnick (1994, p. 27),

> [...] a força gravitacional atua simultaneamente sobre todos os elementos de massa do corpo. O efeito total pode ser calculado imaginando que uma força gravitacional total equivalente age sobre o centro de gravidade do corpo. Se a aceleração gravitacional é a mesma para todos os elementos do corpo, o centro de gravidade coincide com o centro de massa.

Com base nisso, corpos rígidos de grandes volumes, mesmo sofrendo aplicações de forças, devem permanecer estáveis. Vejamos um exemplo de barra horizontal em equilíbrio estático:

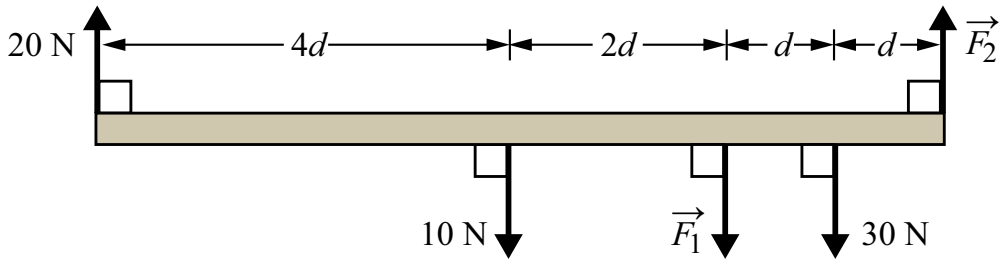


Figura 23 - Barra horizontal em equilíbrio estático / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 36).

Descrição da Imagem: ilustração de barra horizontal, com duas forças perpendiculares atuando na parte superior e três forças perpendiculares atuando na parte inferior.

Analisemos o seguinte exemplo.

Observe a ilustração de uma escada apoiada em um muro e de um bombeiro subindo nela.

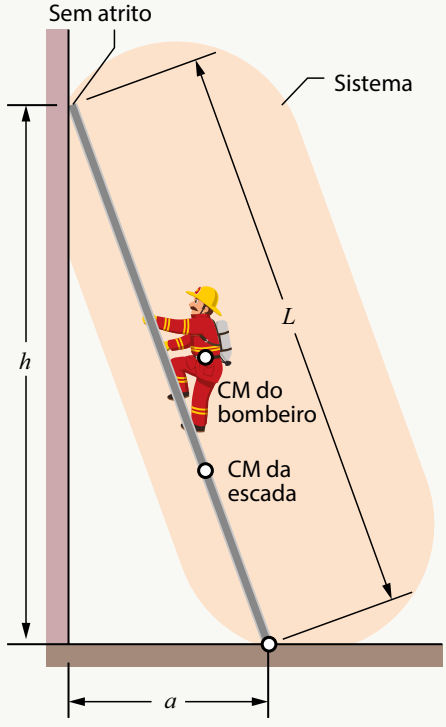


Figura 24 - Escada, na diagonal, em equilíbrio estático / Fonte: Halliday e Resnick (1994, p. 42).

Descrição da imagem: ilustração de um bombeiro subindo em uma escada apoiada em um muro.

Nessa ilustração, o bombeiro está representado por um ponto no meio da escada, o peso é representado por um vetor deslocado ao longo da linha de ação para que a origem coincidisse com o ponto que representa o bombeiro. O deslocamento não altera o torque produzido em relação a eixos perpendiculares. Por não haver atrito entre a escada e o muro, a única força exercida pelo muro sobre a escada é a força horizontal. A força exercida pelo piso sobre a escada possui uma componente horizontal, que é uma força de atrito estática, e uma componente vertical, que é uma força normal (HALLIDAY; RESNICK, 2016).

Você pode expandir seus conceitos sobre estática, além de estudar outros tipos de movimentos e aplicações de forças. Para isso, acesse o QR Code e explore mais exemplos e aplicações sobre o assunto.

Considerando a atuação de forças, observe a ponte a seguir.

Figura 25 - Ponte em estrutura metálica.

Descrição da Imagem: fotografia de uma ponte de grande extensão em estrutura metálica, com colunas verticais de sustentação e catenárias que mantêm o equilíbrio no decorrer dos vãos.

No caso de uma ponte, mesmo que haja a força da gravidade atuando, bem como a força do vento e do repetido tráfego de carros e caminhões, é preciso possuir uma estrutura que esteja em equilíbrio estático.

Outro exemplo é o caso da linha férrea. Veja uma ilustração a seguir.

Figura 26 - Linha férrea com estrutura de concreto armado

Descrição da Imagem: fotografia de uma linha férrea de grande extensão, construída em concreto armado, localizada em uma região de mata.

Diversas estruturas, como linhas férreas, catedrais, estabelecimentos comerciais, casas e móveis, permanecem em repouso por tempo indefinido, mantendo essa forma de equilíbrio. Ao desenvolver esse tipo de projeto, é necessário identificar todas as forças atuantes e todos os torques externos para que seja feita a escolha adequada de materiais e garantir que a estrutura permaneça estável ao receber as cargas. No caso de uma ponte, é necessário que ela não desabe e seja resistente para garantir a segurança dos usuários. Vejamos o exemplo da Torre de Pisa, que, apesar da inclinação existente em relação ao solo, mantém-se em equilíbrio.

Figura 27 - Torre de Pisa, localizada na Itália

Descrição da Imagem: fotografia da vista frontal da Torre de Pisa, evidenciando a inclinação existente em relação ao solo.

Na Torre de Pisa, ocorre a atuação de diversas forças, mas as forças resultantes são nulas, ou seja, a torre se mantém em equilíbrio estático.

Participe da discussão sobre aplicações dos conceitos relacionados ao equilíbrio estático na Arquitetura. Aperte o play, e vamos juntos!

Nesta unidade, abordamos sobre o equilíbrio estático, aplicando grandezas vetoriais e forças para a compreensão desse conceito, em que é necessário um estudo relativo a espaços bidimensionais e tridimensionais para a definição dos conceitos relacionados.

Aprofundamos, nesta unidade, conceitos que abordamos, anteriormente, nas Unidades 7 e 8, em que pudemos ver situações relacionadas ao equilíbrio estático, um caso particular de equilíbrio. Para complementar seus estudos, recomendamos as seguintes obras: ***Cálculo aplicado: curso rápido***, de Larson (2011); ***Cálculo***, de Thomas, Weir e Hass (2002); ***Fundamentos da Física***, de Halliday e Resnick (1994); e ***Princípios da Física***, de Serway e Jewett (1994).

Ao considerarmos os edifícios prediais a seguir, podemos analisar alguns fatores que interferem no equilíbrio estático.

Figura 28 - Centro urbano

Descrição da Imagem: fotografia de um centro urbano com diversos prédios com altura elevada, distribuídos em diferentes partes de um espaço urbano.

Nesse caso, podemos verificar que os prédios estão sujeitos à força peso de sua massa, bem como os móveis e utensílios abrigados no seu interior, além da circulação de pessoas que ocorre. Externamente, precisamos considerar as foças dos ventos atuantes, de ocorrências como chuvas e neve em algumas regiões. Todas essas forças precisam ser absorvidas pelo solo, por meio do sistema estrutural, de modo que se mantenha em equilíbrio estático, ou seja, a soma vetorial de todas essas forças precisa ser nula.

A partir do termo “Estática”, podemos elaborar um mapa mental, estabelecendo relações com as grandezas vetoriais, forças e equilíbrio, conforme o exemplo ilustrado a seguir.

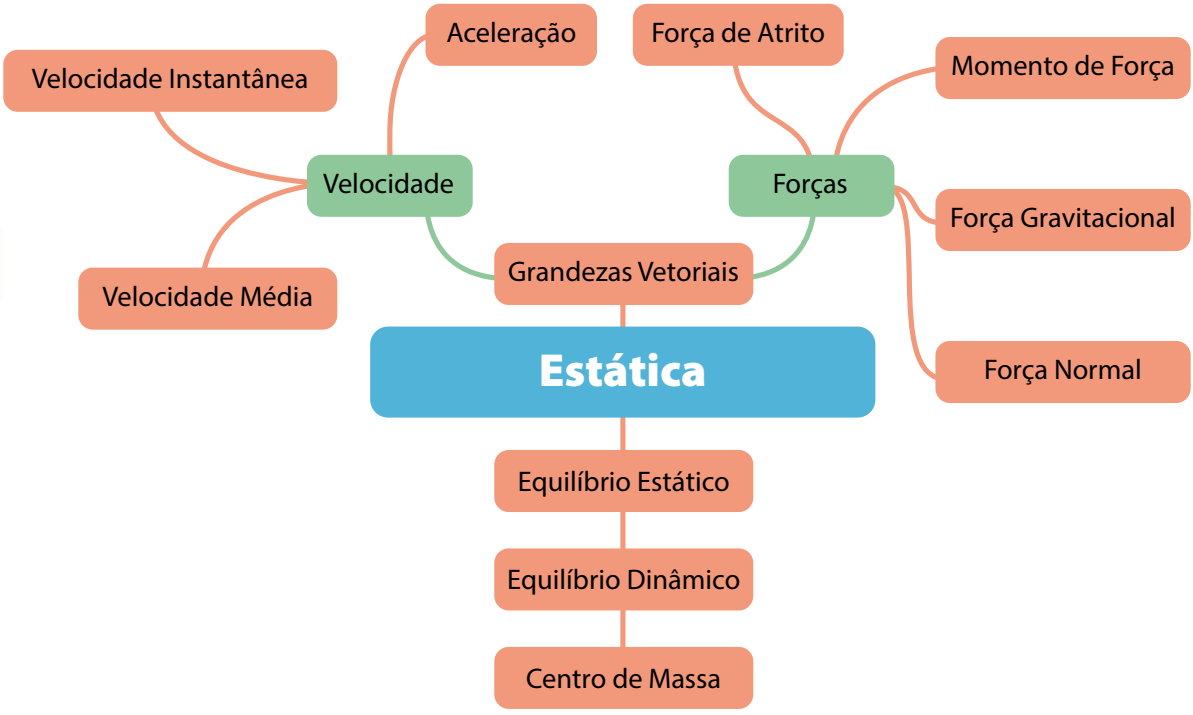


Figura 29 - Mapa mental sobre Estática / Fonte: a autora.

Utilize o exemplo e complemente com as suas anotações de cada tópico abordado nesta unidade, bem como as informações mais relevantes de cada tópico. Para desenvolver essa atividade, recomendamos que utilize a ferramenta de criação de mapa mental gratuitamente disponibilizada em: https://www.goconqr.com/.

MAPA MENTAL

1. Podemos expressar conceitos como a velocidade média em espaços bidimensionais e tridimensionais ao utilizar grandezas vetoriais. Se uma partícula sofreu um deslocamento de $(15m)\hat{i}+(8m)\hat{j}+(7m)\hat{k}$ em 2,0 segundos, qual é a velocidade média durante o movimento?

   a) $(7,5m/s)\hat{i}+(3,5m/s)\hat{k}$

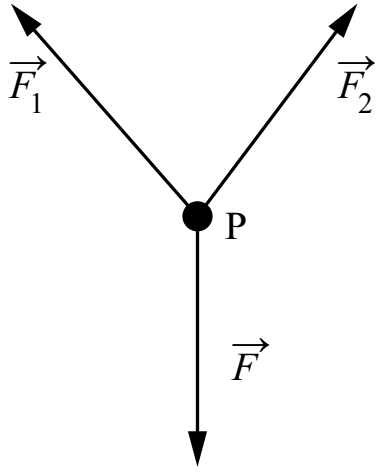
   b) $(3,5m/s)\hat{i}+(4,0m/s)\hat{j}$

   c) $(3,5m/s)\hat{i}+(4,0m/s)\hat{j}+(7,5m/s)\hat{k}$

   d) $(7,5m/s)\hat{i}+(3,5m/s)\hat{j}+(4,0m/s)\hat{k}$

   e) $(7,5m/s)\hat{i}+(4,0m/s)\hat{j}+(3,5m/s)\hat{k}$

2. Considere a atuação de forças em um ponto material conforme a ilustração a seguir.



Fonte: a autora.

Descrição da imagem: ilustração de um ponto central com três forças atuantes, uma em direção ao solo, de forma ortogonal, e duas inclinadas à direita e à esquerda, em sentidos opostos à primeira força.

Sendo que:

$$\vec{F}=4\hat{i}+4\hat{j}$$
$$\vec{F}_1=3\hat{i}-6\hat{j}$$
$$\vec{F}_2=-7\hat{i}+2\hat{j}$$

Podemos afirmar que:

I) Há o equilíbrio estático no ponto material.

PORQUE

II) O somatório das forças é nulo, ou seja, $\vec{F}+\vec{F}_1+\vec{F}_2=0\,\hat{i}+0\,\hat{j}$.

Assinale a alternativa correta.

a) As duas afirmações são verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

b) As duas afirmações são verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

c) A primeira afirmação é falsa, enquanto a segunda é verdadeira.

d) A primeira afirmação é verdadeira, enquanto a segunda é falsa.

e) As duas afirmações são falsas.

3. A Estática é a área da Física que estuda o equilíbrio aplicado a pontos materiais e corpos rígidos. Com base nisso, analise as afirmações a seguir.

I) Se o equilíbrio for do tipo instável, conforme um corpo realiza um pequeno deslocamento em relação à sua posição de equilíbrio por uma ação externa, acaba retornando à sua posição inicial após essa interferência.

II) No centro de massa, temos o ponto em que se concentra toda a massa de um corpo, assim a massa total corresponde ao resultado de todas as massas das partículas que compõem um corpo, em que corpos simétricos possuem distribuição uniforme de massa, sendo o próprio centro geométrico.

III) Diversas estruturas, como linhas férreas, catedrais, estabelecimentos comerciais, casas, móveis, permanecem em repouso por tempo indefinido, mantendo o equilíbrio estático.

Assinale a alternativa que corresponde ao julgamento das afirmações.

a) Apenas I é correta.

b) Apenas III é correta.

c) Apenas II e III são corretas.

d) Apenas I e II são corretas.

e) Apenas I e III são corretas.

UNIDADE 1

BOLDRINI, J. L. *et al*. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. de. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

ENGEL, H. **Sistemas Estruturais**. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 2001.

HOWARD, A.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. São Paulo: LTC, 2006.

PIXABAY. [**Sem título**]. 2017. 1 fotografia. Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/algebra-aritmética-calculadora-2154417/. Acesso em: 21 maio 2021.

PIXABAY. [**Sem título**]. 2019. 1 fotografia. Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/finlandês-ponte-estrela-do-cabo-3963218/. Acesso em: 21 maio 2021.

WIKIMEDIA COMMONS. **Regra da Mão Direita**. 2016. 1 ilustração. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Regra_da_m%C3%A3o_direita.jpg. Acesso em: 21 maio 2021.

UNIDADE 2

LARSON, R. **Cálculo Aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Estruturas de Concreto**. 2004. Disponível em: www.fec.unicamp.br/~almeida/ec702/EESC/Concreto.pdf. Acesso em: 21 maio 2021.

PIXABAY. [**Sem título**]. 2016. 1 fotografia. Disponível em: https://pixabay.com/pt/photos/solar-telhado-estação-de-poder-1495928/. Acesso em: 21 maio 2021.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

Referência on-line:

[1] Em: https://s3.us-east-2.amazonaws.com/legacy.portalsolar.com.br/Content/EditorImages/files/Canadian%20Solar-Modelo-CS6P-245P-245Watts.pdf. Acesso em: 27 maio 2021.

UNIDADE 3

ABNT. **ABNT NBR 9050**: acessibilidade a edifcações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2020. Disponível em: https://www.caurn.gov.br/wp-content/uploads/2020/08/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 28 maio 2021.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

THOMAS, G. B. *et al*. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2002. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

WIKIMEDIA COMMONS. [**Sem título**]. 2016. 1 ilustração. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuito_exemplo_-_Transformada_de_Fourier_para_análise_de_circuitos_elétricos.jpg. Acesso em: 25 maio 2021.

Referências on-line

[1]Em: https://www.geogebra.org/m/ZMHFfcGw. Acesso em: 25 maio 2021.

[2]Em: https://www.geogebra.org/m/rtSm5rBN. Acesso em: 25 maio 2021.

UNIDADE 4

CÁSSIO, J. Paralelismo. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/eFMvcngj. Acesso em: 25 maio 2021.

FREITAS, L. Planificação Prisma — Entrelacem. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/gpwh4h6t. Acesso em: 26 maio 2021.

FRIGHETTO, D.; LUVISA, A. Integral Dupla. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Cy3hufJF. Acesso em: 26 maio 2021.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MINGORANCI, M. R. Planificação do Cilindro. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/x5jvpts7. Acesso em: 26 maio 2021.

NETO, E.; CÁSSIO, J. As Formas Geométricas Espaciais. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/TdAeqB9w. Acesso em: 26 maio 2021.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

STEWART, J. **Cálculo**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2002.

WIKIMEDIA COMMONS. [**Sem título**]. 2011. 1 ilustração. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PolygonsSet.svg. Acesso em: 26 maio 2021.

Referências on-line:

[1] Em: https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=39487. Acesso em 25 maio 2021.

[2] Em: https://www.geogebra.org/m/g4p6WBbr. Acesso em: 26 maio 2021.

[3] Em: https://www.geogebra.org/m/PJFknUbd. Acesso em: 26 maio 2021.

[4] Em: https://www.geogebra.org/m/kVeRMJNA. Acesso em: 26 maio 2021.

[5] Em: https://www.geogebra.org/m/Xchf7hDt. Acesso em: 26 maio 2021.

[6] Em: https://www.geogebra.org/m/t2bUN8tw. Acesso em: 26 maio 2021.

[7] Em: https://www.geogebra.org/m/XNbcWRQr. Acesso em: 26 maio 2021.

UNIDADE 5

ARENALES, S.; DAREZZO, S. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

BORGES, A. C. **Topografia Aplicada à Engenharia Civil**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

IBGE. **Normas de Apresentação Tabular**. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1993. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv23907.pdf. Acesso em: 31 maio 2021.

PIXABAY. [**Sem título**]. 2018. 1 ilustração. Disponível em: https://pixabay.com/pt/illustrations/sobressair-tabelas-folha-de-cálculo-3873854/. Acesso em: 28 maio 2021.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

UNIDADE 6

ABNT. **ABNT NBR 5410**: instalações elétricas de baixa tensão. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2004. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/jeangaldino/disciplinas/2015.1/instalacoes-eletricas/nbr-5410. Acesso em: 2 jun. 2021.

ARENALES, S.; DAREZZO, S. **Cálculo numérico**: aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thompson Learning, 2008.

BARRABES, E. Integracio: sumes inferior i superior. **GeoGebra**, [2021]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/JryR9VKz. Acesso em: 31 maio 2021.

IBGE. **Censo Demográfico 1991**: resultados do universo relativos às características da população e dos domicílios. Rio de Janeiro: IBGE, 1991. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/biblioteca-catalogo?id=782&view=detalhes. Acesso em: 2 jun. 2021.

IBGE. **Censo Demográfico 2000**: características gerais da população: resultados da amostra. Rio de Janeiro: IBGE, 2000. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca=-catalogo?view-detalhes&id=783. Acesso em: 2 jun. 2021.

IBGE. **Censo Demográfico 2010**: características da população e dos domicílios: resultados do universo. Rio de Janeiro: IBGE, 2010. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/93/cd_2010_caracteristicas_populacao_domicilios.pdf. Acesso em: 2 jun. 2021.

MATRIX CALCULATOR. **Soluções de Sistemas de Equações Lineares**. [2021]. Disponível em: https://matrixcalc.org/pt/slu.html. Acesso em: 2 jun. 2021.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. e. **Cálculo numérico**: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

UNIDADE 7

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

OLIVEIRA, I. de.; MIZUKOSHI, J. K. **Leis de Newton**. [2021]. Disponível em: https://propg.ufabc.edu.br/mnpef-sites/leis-de-conservacao/leis-de-newton/. Acesso em: 1 jun. 2021.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física**. Rio de Janeiro: Thomson Learning, 1994.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2002.

Referências on-line

[1] Em: https://wp.ufpel.edu.br/mlaura/files/2012/10/Unidades-Legais-de-Medida.doc. Acesso em: 1 jun. 2021.

UNIDADE 8

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física**. Rio de Janeiro: Thomson Learning, 1994.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2002.

WIKIMEDIA. [**Sem título**]. [2021]. 1 ilustração. Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e2/Forças_sobre_o_bloco_e_sobre_o_cavalo..png. Acesso em: 4 jun. 2021.

Referências on-line:

[1] Em: https://www.geogebra.org/m/AHYdQWDd. Acesso em: 3 mai. 2021.

UNIDADE 9

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física**. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

LARSON, R. **Cálculo aplicado**: curso rápido. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SERWAY, R. A.; JEWETT, J. W. **Princípios de Física**. Rio de Janeiro: Thomson Learning, 1994.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2002.

UNIDADE 1

1. B. A afirmação I é incorreta, pois, ao realizar a multiplicação por escalar, se o escalar for positivo, mantemos o sentido; se o escalar for zero, obtemos o vetor nulo; e, se o escalar for negativo, o vetor resultante terá o sentido oposto. A afirmação II é correta conforme a análise do produto escalar e a sua relação com o ângulo formado pelos dois vetores. A afirmação III é incorreta, pois, ao calcular o produto escalar e o produto misto, em ambos os casos, o resultado é numérico, logo, temos um escalar.

2. A. Primeiramente, reescrevemos o vetor $v = 1i + 4j + 3k = (1,4,3)$. Ao realizar o produto escalar, temos: $u \bullet v = (4,0,-2)(1,4,3) = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 = 4 + 0 - 6 = -2.$

3. C. A afirmação I é incorreta, pois relacionamos o produto escalar entre os vetores com o cosseno do ângulo formado por esses vetores ou, ainda, relacionamos o módulo do produto vetorial com o seno do ângulo formado por esses vetores. A afirmação II é correta, pois, quando calculamos o comprimento do vetor resultante do produto escalar, temos uma equivalência com a área do paralelogramo formado pelos vetores aplicados nesse produto. A afirmação III é correta, pois a interpretação geométrica de $|uxv \bullet w|$ é o volume do paralelepípedo formado por esses três vetores.

UNIDADE 2

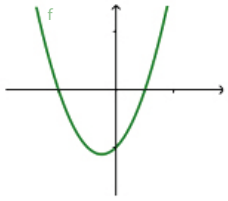
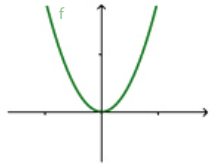
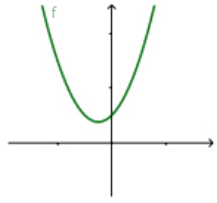
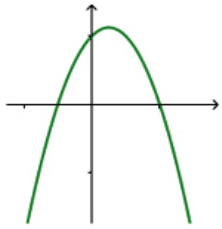
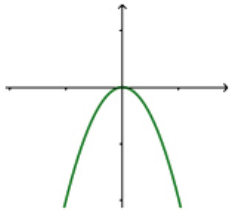
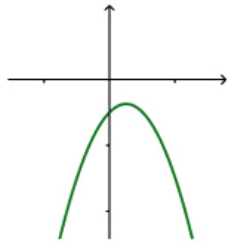
1. E. Temos que o conjunto imagem é determinado pelo resultado da aplicação da lei de formação aos elementos do domínio, assim:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$
$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Logo, o conjunto imagem é formado por $\text{Im}(f) = \{3,5,7\}$.

2. C. O coeficiente linear é o ponto da reta que corta o eixo vertical quando $x = 0$, desse modo, ao analisar o gráfico, conclui-se que $b = 2$.

3. D. Com base nas possíveis posições em que a parábola pode ser representada graficamente, indicadas a seguir:

	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Fonte: a autora.

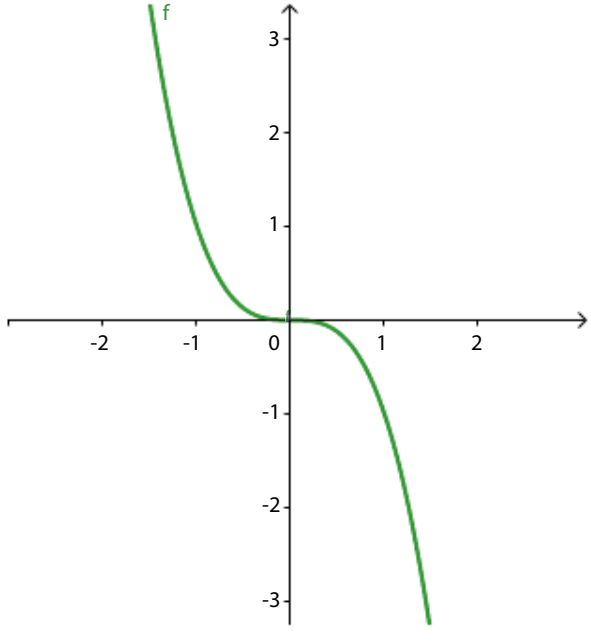
Podemos concluir que as afirmações I e II são verdadeiras. Já a afirmação III é falsa, pois todo zero ou toda raiz de uma função é obtido(a) quando aplicamos y = 0 na função.

CONFIRA SUAS RESPOSTAS

UNIDADE 3

1.

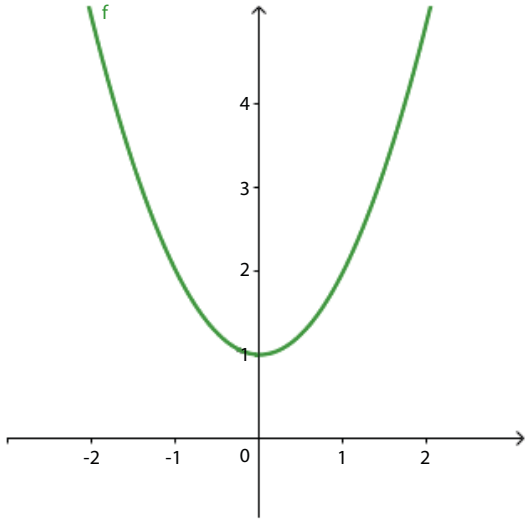
a) Forma uma função.



Fonte: a autora.

Descrição da imagem: representação da função cúbica $y = -x^3$, que é decrescente e corta a origem, partindo do segundo quadrante e se direcionando para o quarto quadrante.

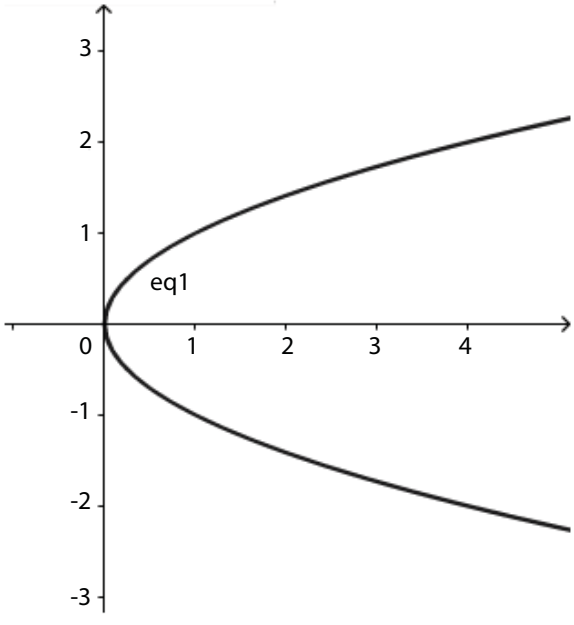
b) Forma uma função.



Fonte: a autora.

Descrição da imagem: representação da função quadrática $y = 1 + x^2$, que é uma parábola simétrica em relação ao eixo vertical, deslocada uma unidade acima da origem.

c) Não forma uma função, pois, para um mesmo valor de x, temos imagens distintas.



Fonte: a autora.

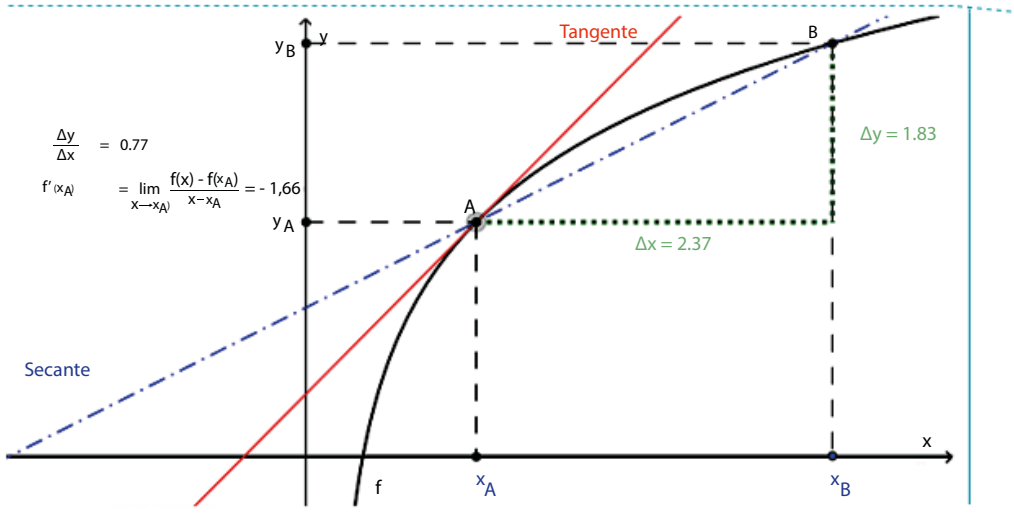
Descrição da imagem: representação da equação $x = y$□. Trata-se de um desenho de uma parábola sobre o eixo horizontal e que parte da origem.

CONFIRA SUAS RESPOSTAS

2. E. A afirmação I é falsa, pois temos uma função que atende à estrutura de função exponencial, ou seja, $f(x) = a^x$. A afirmação II é verdadeira, pois, ao analisar o gráfico, verificamos que os limites laterais convergem para o mesmo ponto. A afirmação III é verdadeira, pois a função é contínua em todo o seu domínio. Assim, a sequência correta é F, V, V.

3. C.

   A afirmação I é correta, conforme ilustramos em:



Fonte: https://www.geogebra.org/m/rtSm5rBN. Acesso em: 25 maio 2021.

Descrição da imagem: interpretação geométrica da derivada, que se trata de uma ilustração, no plano cartesiano, de uma função em que o limite em determinado ponto corresponde à derivada da função, indicado pela reta tangente que toca a curva.

A afirmação II é incorreta, pois, ao aplicarmos a derivada de primeira ordem em uma função que descreve o movimento, obtemos a velocidade instantânea. A afirmação III é correta, pois é possível aplicar as derivadas de ordens superiores em uma função. Logo, as afirmações I e III são corretas.

UNIDADE 4

1. C. Devido ao formato cúbico, podemos interpretar que a altura corresponde à medida da aresta do cubo. Dessa forma, temos:

$$V = a^3$$
$$729 = a^3$$
$$a = 9$$

Ou seja, cada aresta do cubo mede 9 metros, assim, como a altura.

2. D. Nesse caso, podemos associar o volume ocupado pela água na piscina a um paralelepípedo, assim, o volume da piscina será dado por $V = 10 \cdot 4{,}5 \cdot 1{,}5 = 67{,}5\ m^3$, ou seja, caberá, na piscina, $67{,}5\ m^3$ de água.

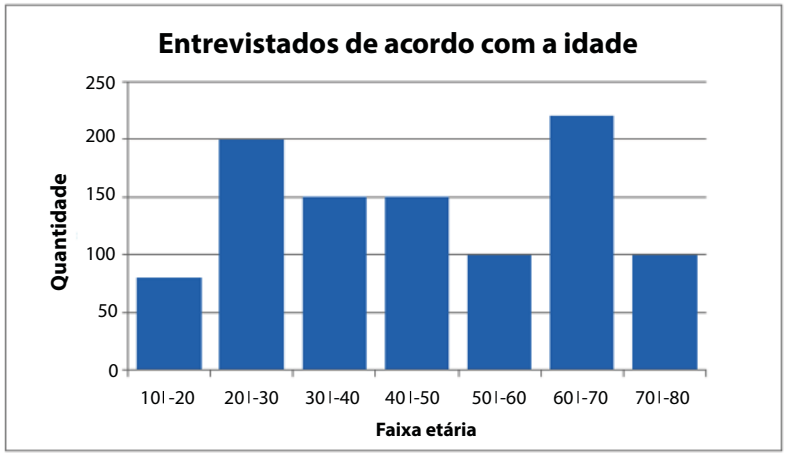
3. E. Para calcular o volume da peça, é preciso determinar a área da base, dada por:

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Calcularemos o volume: $V = Ab \cdot h = 9\sqrt{3}.10 = 90\sqrt{3} \cong 155{,}8\ cm^3$, que equivale à quantidade aproximada de concreto que será utilizado em cada peça.

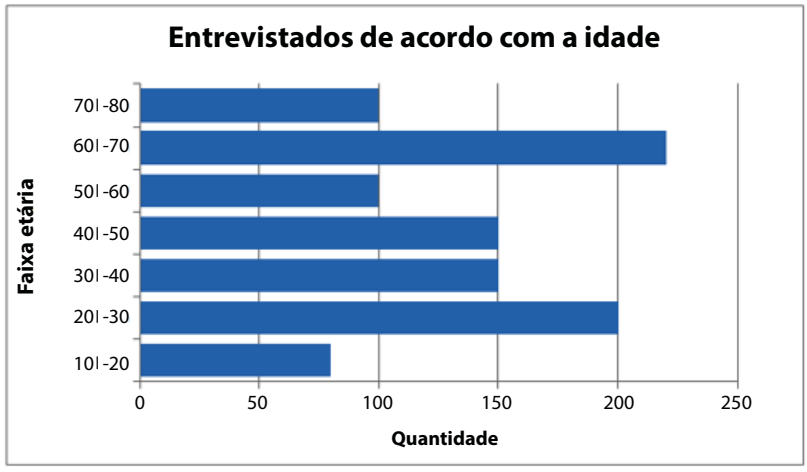
UNIDADE 5

1. Caso a opção seja a representação de um gráfico de colunas, temos a seguinte representação:



Fonte: a autora.

Caso a opção seja de um gráfico de barras, temos a seguinte representação:



Fonte: a autora.

Para a frequência percentual, temos a seguinte representação:

Fonte: a autora.

2. C. Temos que o erro absoluto é dado pela relação:

$$E_{abs} = |(valor\ calculado) - (valor\ verdadeiro)|$$
$$E_{abs} = |8,756 - 8,957|$$
$$E_{abs} = 0,201$$

A medida foi dada em Km, mas, convertendo para metros, temos 201 metros.

3. D. A afirmação I é correta, pois, ao coletarmos dados experimentais, podemos determinar as medidas de posição, como moda, mediana e média. A afirmação II é incorreta, pois, ao utilizarmos recursos computacionais e calculadoras, pode ser preciso utilizar o sistema de numeração binário. A afirmação III é incorreta, pois há funções que não possuem métodos analíticos para determinar as soluções, apenas se pode aplicar os métodos numéricos.

UNIDADE 6

1. Primeiramente, é preciso determinar o polinômio interpolador. Como temos três conjuntos de dados, teremos um polinômio quadrático com a seguinte estrutura:

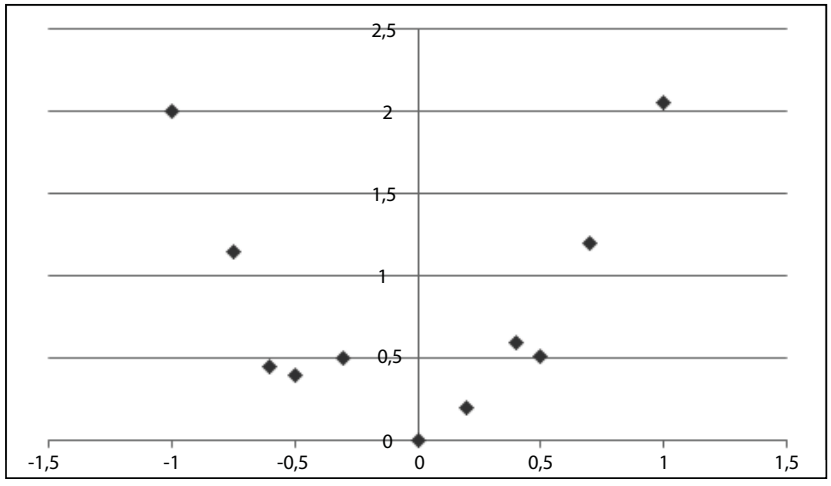
$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

É preciso substituir os dados obtidos na estrutura de sistema de equações:

$$\begin{cases} a_2 x_0 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, obteremos o polinômio $P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$.

2. Primeiramente, representamos os dados por meio de um gráfico de dispersão, conforme ilustrado a seguir:



Fonte: a autora.

Descrição da imagem: representação do gráfico de dispersão, obtido por meio de planilha eletrônica.

Analisando o comportamento dos dados, podemos associar com uma função quadrática, localizada na origem, ou seja, ao realizar o ajuste de curvas, é preciso obter uma função do tipo $f(x) = ax^2$.

3. C. A afirmação I é correta, pois os dados de interpolação não podem extrapolar o intervalo de interpolação. A afirmação II é incorreta, pois podemos realizar o ajuste de curvas para outras funções, como, por exemplo, funções quadráticas. A afirmação III é correta, pois é apresentado o conceito relacionado ao processo de integração numérica.

CONFIRA SUAS RESPOSTAS

UNIDADE 7

1. B. Convertendo 512 m³ para litros, temos que multiplicar por 1000, ou seja, temos 512000 litros. Devido ao formato cúbico, podemos interpretar que a altura corresponde à medida da aresta do cubo, dessa forma, temos:

$$V = a^3$$
$$512 = a^3$$
$$a = 8$$

Ou seja, cada aresta do cubo mede 8 metros, assim como a altura.

2. C. Primeiramente, verificamos quantas gotas ocorreram em um período de dia, ou seja,

$$1\,\text{min} \rightarrow 20\ \textit{gotas}$$
$$1\ \textit{hora} \rightarrow 20 \cdot 60 = 1200\ \textit{gotas}$$
$$24\ \textit{horas} \rightarrow 1200 \cdot 24 = 28800\ \textit{gotas}$$

Calculando a quantidade de mL, temos:

$$28800\ \cdot 0{,}4\ \text{mL} = 11520\ \text{mL}$$

Convertendo em litros, temos:

$$11520\ \text{mL} \rightarrow 11{,}52\ \text{L}$$

Ou seja, a quantidade de água desperdiçada foi de 11,52 litros.

3. Temos que obter a distância entre as cidades A e C, ou seja, realizando a diferença entre o Km 200 e o Km 100, temo um total de 100 km. Com relação ao deslocamento da cidade C para a cidade B, temos que fazer a diferença do Km 200 para o Km 150, ou seja, 50 km. Assim, o percurso total é dado pela adição de $100 + 50 = 150$, ou seja, o automóvel percorreu 150 km.

UNIDADE 8

1. B. Consideremos a cidade A como ponto inicial da trajetória, indicada pelo Km 0, e a cidade B, o ponto final da trajetória, indicada pelo Km 280. Com base nisso, podemos inferir que:

   Veículo A: $s_0 = 0$ e $v_A = 80\ km/h$

   Veículo B: $s_0 = 280$ e $v_B = -60\ km/h$

   Determinando a função horária de cada carro, temos:

   Veículo A: $s = s_0 + vt \rightarrow s_A = 80t$

   Veículo B: $s = s_0 + vt \rightarrow s_B = 280 - 60t$

   Se os veículos se encontrarem, as funções horárias serão equivalentes, ou seja,

   $$s_A = s_B$$
   $$80t = 280 - 60t$$
   $$80t + 60t = 280$$
   $$140t = 280$$
   $$t = \frac{280}{140}$$
   $$t = 2\ h$$

   Para determinar o km em que os veículos se encontrarão, substituímos $t = 2$ em uma das equações, assim:

   $$s_A(2) = 80 \cdot 2 = 160$$

   Ou seja, os veículos se encontram no Km 160. Para determinar a distância até a cidade B, temos que:

   $$280 - 160 = 120\ km.$$

2. A. A afirmação II é incorreta, pois, se o movimento for do tipo retrógrado, com a velocidade negativa, temos a reta do gráfico da função horária da posição para o movimento uniforme de forma decrescente. A afirmação III é incorreta, pois o movimento retrógrado possui velocidade negativa, logo o gráfico é decrescente.

3. C. Podemos completar corretamente com o termo "centro de massa", de modo que: o **centro de massa** é determinado por meio das coordenadas localizadas em uma da placa homogênea de espessura constante, cujas dimensões são conhecidas, indicando, assim, o ponto de equilíbrio dessa superfície.

CONFIRA SUAS RESPOSTAS

UNIDADE 9

1. E. A velocidade média é dada por:

$$\vec{V}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{(15m)\hat{i} + (8m)\hat{j} + (7m)\hat{k}}{2,0s} = (7,5m/s)\hat{i} + (4,0m/s)\hat{j} + (3,5m/s)\hat{k}$$

2. A. Temos que:

$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4\hat{i} + 4\hat{j}) + (3\hat{i} - 6\hat{j}) + (-7\hat{i} + 2\hat{j})$$
$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (4 + 3 - 7)\hat{i} + (4 - 6 + 2)\hat{j}$$
$$\vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

Desse modo, a afirmação I é verdadeira, e a afirmação II é uma justificativa correta da primeira.

3. C. A afirmação I é incorreta, pois a afirmação se refere ao equilíbrio estável. Já as afirmações II e III são corretas.